

Sobre el Postulado de De Zolt en tres dimensiones

Sobre o Postulado de De Zolt em três dimensões

On De Zolt's Postulate in three dimensions

Resumen

Este artículo tiene dos objetivos, a saber, discutir en qué medida las pruebas conocidas del Postulado de De Zolt pueden ser extendidas al caso de tres dimensiones y proveer una prueba alternativa y ciertamente básica de esa proposición para tres dimensiones en una sub-teoría débil de la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Palabras-clave: Postulado de De Zolt; tres dimensiones; Teoría de tipos

Resumo

Este artigo tem dois objetivos, a saber, discutir até que ponto as provas conhecidas do Postulado de De Zolt podem ser estendidas ao caso de três dimensões e prover uma prova alternativa e certamente básica de de Zolt para três dimensões em uma subteoria fraca da Teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Palavras-chave: Postulado de De Zolt; Três dimensões, Teoria de tipos

* Universidad Nacional del Litoral (UNL) / CONICET

** Universidade Federal da Bahia (UFBA)

*** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) / Sociedade Brasileira de Lógica

Recebido em: 10/04/2021 Aceito em: 17/11/2021

Abstract

This article has a twofold goal, namely, to discuss to what extent the known proofs of De Zolt's Postulate can be extended to the case of three dimensions, and to provide an alternative and basic proof of this proposition for three dimensions in a quite weak sub-theory of Zermelo-Fraenkel set theory.

Keywords: De Zolt's Postulate; Three-dimensions; type theory

Introducción

El enunciado de la proposición sobre la cual *no* versa este artículo es el siguiente: “Si un polígono es descompuesto en partes poligonales en cualquier modo dado, entonces la unión de todas menos una de esas partes no es equivalente (i.e., igual en área) al polígono dado”. Conocida como Postulado de De Zolt, fue introducida por ese matemático italiano en 1884, y puede con justicia ser llamada “el teorema fundamental” de la teoría de la equivalencia del área plana. *Teorema*, en efecto, pues, en 1899, Hilbert la demuestra en el capítulo IV de *Fundamentos de geometría, y fundamental*, pues en su demostración reside la culminación de la fundamentación puramente geométrica de la teoría de la equivalencia del área plana. Nuestro artículo versa sobre su *extensión* a tres dimensiones, *mutatis mutandis* los correspondientes conceptos para poliedros. A. Andreotti, que ofreció en 1949 una prueba también puramente geométrica (no exenta de dificultades), la enunció así: “Descompuesto un polígono en partes poliédricas, la suma de todas estas partes menos una no es equivalente (i.e., igual en volumen) al poliedro entero”.

El lector informado habrá recordado una bien conocida consecuencia de la llamada “paradoja de la esfera”, aparecida en un célebre artículo de Tarski y Banach de 1924, sobre teoría de la equivalencia en tres dimensiones: hay poliedros, por ejemplo, tetraedros, con igual volumen, pero que no son equivalentes. Este resultado implica que la extensión de De Zolt no puede ser válida en Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección (ZFC). Pero hay un camino diferente, que también tiene su origen remoto en un trabajo de un miembro menos destacado de la misma escuela polaca. En efecto, Lomnicki,

en 1922, consideró la formulación del Postulado de De Zolt en dos dimensiones dentro de la teoría abstracta de las magnitudes, que había dado sus primeros pasos a inicios del siglo XX.

En un artículo de 2019, retomando ideas de Lomnicki que no fueron desarrolladas en ese momento, bajo la luz de Paulo Veloso, presentamos la formulación y demostración de De Zolt en dos dimensiones dentro de una teoría abstracta que denominamos de magnitudes compatibles. En la demostración también abstracta de De Zolt en tres dimensiones que ahora esquemáticamente presentaremos nos servimos de ideas ya utilizadas en nuestro artículo, pero reformulándolas en términos de una teoría débil de tipos. Hasta donde sabemos, este tratamiento no tiene precedentes en la literatura.

Las dos pruebas abstractas mencionadas siguen el menos trillado de los senderos en que se bifurca el jardín matemático (y filosófico) del Postulado de De Zolt. En la sección 2, explicaremos las restricciones que son necesarias debido a la paradoja de Banach-Tarski. En la sección 3, presentaremos las ideas fundamentales de la prueba de Hilbert “puramente geométrica” de De Zolt en dos dimensiones y la extensión de esas ideas a tres dimensiones por Andreotti (1949). En la sección 4, damos una idea de una demostración abstracta de De Zolt en tres dimensiones en una teoría de tipos de la cual sabemos que es más débil que ZFC. Finalmente, en la sección 5 presentaremos las reglas de tipos que utilizaremos y el esquema de la demostración de esa versión abstracta de De Zolt en tres dimensiones.

2. Las paradojas de la esfera y el Postulado de de Zolt

Cuando hablamos de extender nuestra prueba abstracta de De Zolt a tres dimensiones debemos considerar las restricciones que deben ser contempladas en función de las bien conocidas paradojas de la esfera, una debida a Hausdorff y otras dos debidas a Banach y Tarski. En efecto, las paradojas nos enseñan que el Postulado de De Zolt no puede ser demostrado dentro de la teoría de ZFC.

Dados dos subconjuntos A y B de \mathbb{R}^3 , decimos que A y B son finitamente equidescomponibles, esto es, $A \sim B$, si y solamente si hay dos familias de conjuntos disjuntos dos a dos A_0, \dots, A_k y B_0, \dots, B_k y una familia g_0, \dots, g_n de translaciones

y rotaciones tales que, para todo $i = 0, \dots, k$, $g_i(A_i) = B_i$, $A = \cup_{i=0, \dots, k} A_i$ y $B = \cup_{i=0, \dots, k} B_i$.¹ El Teorema 2.1 es la versión general de la paradoja de la esfera.²

Teorema 2.1 (Banach-Tarski). Sean A y B dos subconjuntos acotados de \mathbb{R}^3 , entonces $A \sim B$.

Del Teorema 2.1, también conocido como la paradoja general de Banach-Tarski, se sigue fácilmente el Corolario 2.1, establecido integralmente dentro del contexto de las paradojas de la esfera.

Corolario 2.1 (Banach-Tarski) Dos esferas cualesquiera en \mathbb{R}^3 son equidescomponibles.

Ahora bien, se puede mostrar que el Postulado de De Zolt no puede ser válido en la teoría que demuestra el Corolario 2.1. En efecto, sea un octaedro circunscrito en la esfera unidad, como en la Figura 1, y sea un octaedro mayor circunscrito en la esfera con diámetro 5, como en la Figura 2. La descomposición en el sentido del Postulado de De Zolt de los dos octaedros son, respectivamente, $\{w, z\}$ y $\{w, x, y, z\}$. Por el Corolario 2.1 las dos esferas son equidescomponibles. La familia de isometrías que testimonian esa descomposición lleva la descomposición de De Zolt de la mayor a la menor. Por un lado, si el Postulado de De Zolt vale en \mathbb{R}^3 , entonces tal equidescomposición es imposible, ya que $\{w, z\} \not\cong \{w, x, z\} \cong \{w, x, y, z\}$ es una consecuencia del Postulado de De Zolt.



Figura 1: Octaedro circunscrito en la esfera unidad.

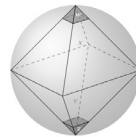


Figura 2: Octaedro circunscrito en la esfera de diámetro 5.

1 En el contexto de la geometría plana, dos figuras poligonales se llaman *equidescomponibles* cuando es posible descomponerlos en un número finito de triángulos congruentes uno a uno o en parejas. Asimismo, dos polígonos se llaman *equicomplementarios* cuando es posible añadirles otros polígonos equidescomponibles de a pares, tales que los polígonos resultantes son equidescomponibles. Las nociones de equidescomposición y equicomplementariedad también se aplican, *mutatis mutandi*, en el caso de la geometría del espacio.

2 Véase Wagon, S. The Banach-Tarski Paradox, 1993; Banach, S., Tarski, A. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, 1924.

Consideremos ahora el Teorema 2.2, conocido como la Paradoja de Hausdorff, aparentemente una versión más débil de la paradoja de la esfera.³ En el teorema se habla de la superficie S^2 de la esfera tres dimensiones en lugar de la esfera sólida misma como lo hace el Corolario 1. La definición de G -paradojal parece ser el origen, en sentido cronológico, de las paradojas de la esfera. Se trata de una definición relativa al grupo G de rotaciones geométricas en \mathbb{R}^3 , por ejemplo, el conjunto de rotaciones sobre los ejes de S^2 con la composición de rotaciones como operación de grupo. Decimos que un conjunto acotado A de \mathbb{R}^3 es G -paradojal, si hay dos subconjuntos disjuntos de A , que pueden ser partidos en un número finito de piezas y entonces, por la acción de la operación de grupo sobre esas piezas, podemos crear dos copias del conjunto original.

Teorema 2.2 (Hausdorff). Hay un conjunto numerable $D \subset S^2$ tal que $S^2 - D$ es paradojal por rotación.⁴

El Teorema 2.2 es usado para proveer un argumento más contra la validez del Postulado de De Zolt. En efecto, considérese el octaedro circunscripto en la esfera unidad como en la Figura 1. Hay seis puntos, los vértices del octaedro, que pertenecen a S^2 . Si aplicamos el Teorema 2.2 entonces hay un conjunto $D \subset S^2$ tal que $S^2 - D$ es paradojal por rotación. Dado que D es infinito, podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que los seis vértices del octaedro no pertenecen a D . Luego, hay dos copias de ese octaedro que son isométricas al octaedro original. Considerando la descomposición $\{w, z\}$ del octaedro, y si De Zolt vale, entonces $\{x, y\}$ es equivalente a $\{x, y, x', y'\}$, donde x' e y' son las copias de la descomposición de la segunda copia del octaedro. Sin embargo, esto es absurdo, porque la primera descomposición tiene 2 elementos y la segunda 4.

El Postulado de De Zolt no es la única proposición demostrable en la geometría plana que no vale en el espacio. El teorema de Bolyai-Gerwien, por ejemplo, no es demostrado en tres dimensiones, pero en este caso debido a su falsedad. Decimos que dos polígonos son congruentes por disección si y solamente si uno de ellos puede ser cortado en piezas poligonales y rearmado en la forma de otro polígono. El teorema de Bolyai-Gerwien establece que dos polígonos P_1 y P_2 son congruentes por disección si y solamente si ellos tienen

3 La Paradoja de Hausdorff es usada en la demostración de la Paradoja de Banach-Taski.

4 Debemos observar que en la bien conocida prueba de ese teorema el cardinal de D es infinito. Véase Wagon, S. The Banach-Tarski Paradox, 1993.

la misma área.⁵ Max Dehn (1904) demostró que el tetraedro regular y el cubo no son congruentes por disección.⁶

Dado que ZF es consistente con AC, y que los teoremas (paradojas) de Banach-Tarski son obtenidas en ZFC, tenemos que concluir que De Zolt no es un teorema de ZF, sino en una teoría más débil. En efecto, que De Zolt falle en ZFC no parece ser una consecuencia directa de AC. Pero antes de ofrecer una prueba de De Zolt en una teoría más débil, discutiremos en las secciones 3 y 4 en qué medida las pruebas conocidas de De Zolt pueden ser extendidas a tres dimensiones.

3. La teoría de la equivalencia geométrica para poliedros

Muchas de las pruebas conocidas del postulado de De Zolt para la geometría de tres dimensiones se presentan como una extensión “directa” de la prueba de Hilbert en *Fundamentos* para el caso original de la geometría plana. Esta es la intención manifiesta de Andreotti (1949), pero antecedentes importantes ya se encuentran en Schatunowsky (1903) y Süß (1921).⁷ La prueba de Hilbert se caracteriza por dos rasgos fundamentales: por un lado, se trata de un argumento estrictamente geométrico, en tanto no hace uso de consideraciones numéricas, en particular de la noción usual de medida de área caracterizada como una función numérica cuyo rango es el conjunto de los números reales (positivos); por otro lado, la prueba sólo utiliza *medios elementales*, en cuanto no supone ningún axioma de continuidad, especialmente el axioma de Arquímedes. La obtención de una prueba De Zolt para poliedros que respete las mismas restricciones metodológicas contribuía así a elucidar en qué medida era posible un tratamiento análogo en el espacio.

Más precisamente, si bien los conocidos resultados de Dehn (1902) antes mencionados revelaban que un desarrollo riguroso de la teoría del volumen

5 Este es un problema clásico de geometría resuelto independientemente por F. Bolyai (1832) y P. Gerwien (1833).

6 Dehn, M. Über Rauminhalt, 1902. Saber si todo par de poliedros con el mismo volumen son o no congruentes por disección es el tercer problema propuesto a la comunidad matemática por Hilbert en su famosa conferencia *Los problemas de la matemática* (1900) en París. Max Dehn, en su Tesis de habilitación, definió una noción de invariancia hoy conocida como Invariancia de Dehn, y mostró que para cualquier par de poliedros con el mismo volumen, ellos son invariantes si son congruentes por disección. Véase Wagon, S. *Ibidem*.

7 Véase Andreotti, A. Sulla proposizione di De Zolt pei poliedri, 1949; Schatunowsky, S. Über den der Rauminhalt Polyeder, 1903 y Süß, W. Begründung der Lehre vom Polyederinhalt, 1921.

en el espacio requería necesariamente de la admisión de axiomas de continuidad y de métodos no elementales, la posibilidad de obtener una prueba de De Zolt por medios más restringidos resultaba aún relevante para la elucidación del concepto de volumen de un sólido como una clase de magnitud geométrica. Como es bien sabido, la determinación de las condiciones necesarias y suficientes para probar que cierto dominio de objetos geométricos determina una clase de magnitud era un problema central en los fundamentos de la geometría hacia fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Resultará entonces útil que comentemos brevemente la idea general de la prueba de Hilbert del postulado de De Zolt para polígonos, y su pretendida extensión “directa” en la geometría de tres dimensiones.

La idea central de la prueba elemental de Hilbert consiste en derivar De Zolt como una consecuencia inmediata de la existencia de una función de medida de área para polígonos, descrita de un modo *puramente geométrico*. Más precisamente, Hilbert define la medida de área de un polígono plano como un *segmento característico u asociado* (orientado positivamente), o mejor, como un elemento de un cuerpo ordenado generado por su construcción estrictamente geométrica de un cálculo de segmentos. De este manera, la noción hilbertiana de “medida de área” no requiere de la posibilidad de medir la longitud de segmentos por medio de números reales, para así calcular esta medida por medio de las fórmulas numéricas usuales. Ello pone de manifiesto su independencia respecto del axioma de Arquímedes.

Hilbert define en primer término la medida de área de triángulos, de acuerdo con la fórmula habitual que consiste en realizar el semiproducto de la base por la altura correspondiente, para luego caracterizar la medida de área de un polígono a partir de aquellas *figuras básicas*, es decir: la medida de área de un polígono consiste en la suma de las medidas de áreas de los triángulos en los que queda dividido por una determinada descomposición (i.e., triangulación). El núcleo de la prueba consiste en obtener ciertas propiedades fundamentales de estas medidas de área y demostrar que a polígonos equivalentes (i.e., equicomplementarios) les corresponde igual medida de área. De Zolt es un mero corolario de este hecho geométrico.

Para el caso básico de los triángulos, el hecho de que su medida de área está *bien definida* –i.e., es independiente de lado escogido como base y la altura correspondiente – se sigue fácilmente de la teoría de las proporciones para segmentos lineales y de los teoremas básicos sobre la semejanza de triángulos. Hilbert prueba además otras tres propiedades fundamentales de las medidas de áreas, a saber: i) a triángulos congruentes les corresponden igual medida

de área; ii) la medida de área de un triángulo (positivamente orientado) es siempre positiva; iii) si se descompone un triángulo en triángulos parciales, la suma de las medidas de áreas de éstos es igual a la medida de área del triángulo total, es decir, se cumple la propiedad *aditiva*. Más aún, para el caso general de la medida de área de un polígono, la demostración de que dicha función está bien definida se reduce a mostrar que satisface esta última propiedad de aditividad. Dicha prueba descansa esencialmente en la posibilidad de descomponer a todo polígono en un número *finito* de triángulos.

La mencionada prueba de De Zolt para polígonos se sigue de un modo bastante inmediato de estas propiedades de la función geométrica de medida de área, es decir, de los *segmentos asociados*. En efecto, dada la propiedad aditiva y la definición de área de un polígono, es claro que polígonos equivalentes (i.e., equicomplementarios) tienen igual medida de área.⁸ Luego, sea P un polígono dado y designemos a $[P]$ como su medida de área. Consideremos una descomposición de P en un número finito de partes poligonales P_1, P_2, \dots, P_n . De la propiedad aditiva se sigue que $[P] = [P_1] + [P_2] + \dots + [P_n]$. Puesto que la medida de área de *cada una* de estas partes poligonales P_1, P_2, \dots, P_n es *mayor* a 0, la medida de área de P es mayor que la de cualquiera de sus componentes poligonales, por ejemplo, P_1 . Por lo tanto, P y P_1 no son equivalentes. De Zolt es simplemente un caso especial de este resultado.

Es oportuno resaltar así el carácter estrictamente geométrico de la noción de “medida de área” desarrollada por Hilbert, que no descansa en la posibilidad de medir la longitud de segmentos por medio de números reales. En un sentido estricto, la función de medida hilbertiana es una aplicación que le asigna a cada polígono plano un segmento determinado a través de la teoría de las proporciones y de la semejanza. Es de este modo que se logra evitar el recurso al axioma de Arquímedes. Esta es luego la estrategia que Andreotti (1949) intenta replicar para el caso del postulado de De Zolt para poliedros.

Andreotti restringe su estudio para el caso específico de los tetraedros o pirámides triangulares, es decir, sólidos consistentes en cuatro caras triangulares, seis aristas y cuatro vértices (véase figura 3). Una suposición básica es que el mismo razonamiento puede ser extendido para todo tipo de poliedros. La idea general de la prueba consiste en demostrar que a todo tetraedro se le puede asociar *un segmento determinado* que constituye una función aditiva de los tetraedros parciales en los que puede ser descompuesto un tetraedro. Para definir este segmento asociado, Andreotti se vale nuevamente de la teoría

8 Hilbert establece esta afirmación como la primera parte del teorema 51 de Hilbert 1971.

de las proporciones y los triángulos semejantes. En efecto, dado un tetraedro Δ , fijado un segmento unidad u y construidos los segmentos asociados a cada una de las caras triangulares, se sigue de los teoremas sobre la semejanza de triángulos que dichos segmentos son inversamente proporcionales a las alturas de Δ relativas a las correspondientes caras. De allí resulta que el segmento $\delta(\Delta)$ queda unívocamente determinado, puesto que constituye el cuarto proporcional respecto del segmento unidad e , el segmento asociado a una cara y la altura correspondiente. $\delta(\Delta)$ designa así el segmento asociado al tetraedro Δ .

Dado que Andreotti pretende construir su prueba como una extensión “directa” de la prueba de Hilbert para dos dimensiones, su introducción de este segmento asociado es esquemática y sus propiedades esenciales son dadas por supuestas. Más precisamente, es claro que a tetraedros congruentes le corresponden iguales segmentos asociados y el segmento asociado a un tetraedro es siempre positivo. Más aún, estos segmentos asociados deben ser también considerados como elementos del cuerpo ordenado generado por el cálculo geométrico de segmentos, con lo cual Andreotti pretende construir una aplicación geométrica del conjunto de los poliedros en el espacio al conjunto linealmente ordenado de segmentos.

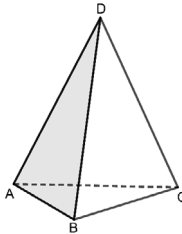


Figura 3: Tetraedro

El núcleo de la prueba consiste entonces en mostrar que los segmentos asociados constituyen una función aditiva. Específicamente, Andreotti procura demostrar el siguiente teorema: Si el tetraedro Δ se descompone en los tetraedros $\Delta_k = A_k B_k C_k D_k$, el segmento asociado a Δ es igual a la suma de los segmentos asociados a los Δ_k , es decir, $\delta(\Delta) = \sum \delta(\Delta_k)$. Un aspecto central de la demostración de Andreotti es que este resultado puede ser conseguido exclusivamente a partir de la consideración de descomposiciones finitas y, por

lo tanto, sin suponer el axioma de Arquímedes.⁹ De este modo, el hecho de que el segmento asociado a poliedros satisface la propiedad aditiva permite entonces replicar la prueba de De Zolt para polígonos ensayada por Hilbert para el caso de los sólidos en el espacio. En efecto, puesto que a poliedros equivalentes les corresponden iguales segmentos asociados, es imposible que un poliedro sea equivalente con una parte propia. Ello concluye la idea general de la prueba *geométrica* de De Zolt para poliedros.

4. Una prueba abstracta de De Zolt

Consideremos una tentativa ingenua de demostrar De Zolt por descomposición de un poliedro en partes. Por ejemplo, dado un dodecaedro, sea su descomposición en tres poliedros (a la derecha) como mostrada en la Figura 4:

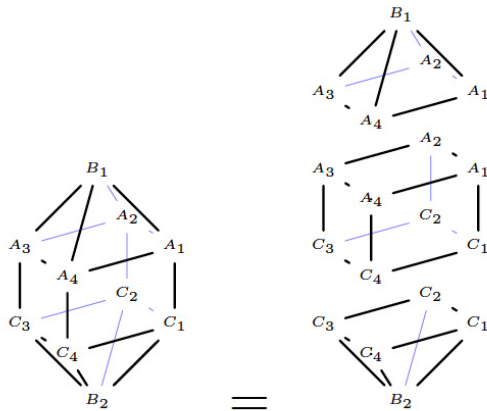


Figura 4

La remoción del poliedro B_1, A_1, A_2, A_3, A_4 de la descomposición arriba resulta, en ese caso, en un poliedro convexo, como mostrado en la Figura 5, que no es equivalente al poliedro original.

9 Para más detalles sobre esta prueba, véase Andreotti 1949, p. 71-75.

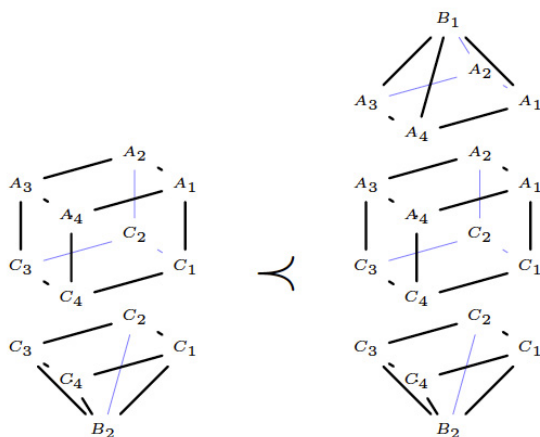


Figura 5

Pero aún esta tentativa ingenua exige algunas restricciones. La primera es sobre la noción de parte: caras como A_1, A_2, A_3, A_4 , del poliedro B_1, A_1, A_2, A_3, A_4 , que llamamos partes impropias, no forman parte de la noción de descomposición que está en consideración. La mencionada cara es un poliedro o parte *trivial*. Intuitivamente, una parte trivial es absorbida por la adición, por ejemplo, si sumamos la cara A_1, A_2, A_3, A_4 al poliedro B_1, A_1, A_2, A_3, A_4 el resultado es el mismo poliedro. Luego, una descomposición contendrá partes no triviales, esto es, *propias*. En general, de manera abstracta, una descomposición de una magnitud a , por ejemplo, un poliedro, es una lista de magnitudes a_1, \dots, a_n que son todas propias. Pero esta no es la única condición.

En efecto, podemos pensar una descomposición, como acabamos de decir, como una *lista* de partes propias, por ejemplo, una lista cuyos elementos son los tres poliedros de la figura anterior. Pero, además de esos poliedros ser magnitudes propias, ellas deben poder ser sumadas, esto es, es una lista de magnitudes compatibles. Una *partición* es una lista de magnitudes propias compatibles. Ahora bien, la sumatoria de una lista es la suma de todos sus elementos (que podría incluir también triviales), pero si la lista es de compatibles, y si, además, es una lista de propias, entonces la sumatoria es también propia. Intuitivamente, el tipo de descomposición que queremos considerar consiste en partir de un poliedro arbitrario y una descomposición en partes poliédricas (propias). Luego, el universo de discurso está restringido a las partes del poliedro.

Dos partes poliédricas de un poliedro P son compatibles si ellas tienen caras en común que también son partes (impropias) de P . La suma de esas partes es, intuitivamente también, la remoción de la cara común. De esa manera, la suma es una operación interna sobre partes compatibles de un polígono dado.

Con estas nociones, dada una partición con sumatoria a , que, recordamos, es la suma de todos los elementos de la lista, la partición es una descomposición *global* de una magnitud m si y solamente si la sumatoria de a es equivalente con m . Una descomposición será *local* si y solamente si la sumatoria es igual a la magnitud. Desde el punto de vista geométrico, una descomposición puede ser simplemente congruente con la magnitud dada o equivalente con ella. Trivialmente, toda descomposición local de una magnitud m es una descomposición global de m , pero no la recíproca. Ahora bien, global o local, si se prueba que removiendo de la descomposición uno de sus elementos el resultado no es equivalente o igual a la magnitud dada, entonces tenemos dos versiones abstractas de De Zolt y sus correspondientes pruebas.

Distingamos entre la cabeza, la cola y el armazón (*shell*) de una participación: la cabeza está compuesta por todos los elementos menos el último, la cola por todos los elementos menos el primero, el armazón está compuesto por todos los elementos menos uno, distinto del primero y del último. Llamamos una lista b un truncamiento de la lista a si y solamente si a es una cabeza, una cola o un armazón. Los casos de la cabeza y la cola son triviales, pero el armazón de una partición puede ser compatible o no. Pero si el armazón q de una partición p es compatible, entonces la sumatoria de q es estrictamente menor que la sumatoria de p . Y así, dada una participación p , o un truncamiento q no es compatible o bien su sumatoria es estrictamente menor que la de p .

De lo anterior se siguen nuestras versiones abstractas de De Zolt.

Teorema 4. 1 (Descomposición global): Considérese una descomposición global p de m . Entonces, para cada truncamiento q de p , q no es una descomposición global de m .

Teorema 4. 2 (Descomposición local) Considerar una descomposición local p de m . Entonces, para cada truncamiento q de p , q no es una descomposición de m .

Quizás sea oportuno destacar aquí las semejanzas entre esta “prueba abstracta” del De Zolt y la prueba de Hilbert. Recordemos que esta última prueba se apoya en el hecho de que dos polígonos de igual medida de área son siempre

equivalentes, y en dos propiedades fundamentales de la medida de área, a saber, que son siempre positivas y que satisfacen aditividad. De este modo, este tratamiento abstracto de De Zolt –que sólo hemos esbozado aquí– contribuye a clarificar algunos aspectos centrales de la prueba de Hilbert. En particular, la distinción entre magnitudes propias y triviales permite elucidar la apelación a una noción de medida de área en esta prueba geométrica.

Ambos teoremas 4.1 y 4.2, además de los resultados asociados con las nociones que hemos definido, se siguen de los axiomas usuales de comparación (menor o igual), que nos permite definir equivalencia, y de los axiomas de adición, que juntos configuran nuestra teoría de las magnitudes compatibles. Los axiomas de adición, a diferencia de la teoría estándar de magnitud, no incluyen conmutatividad. A la teoría estándar, por otro lado, se le puede agregar o no el Axioma de Arquímedes, que tampoco precisamos suponerlo en nuestra teoría de magnitudes compatibles. Con estos axiomas y las nociones mencionadas dimos una prueba de manera abstracta de De Zolt para dos dimensiones, inspirada en ideas de Lomnicki (1922).¹⁰ ¿Por qué no podemos simplemente afirmar que también vale esta demostración para tres dimensiones? Esta pregunta debe ser puesta en conexión con otra, a saber, con la posibilidad de extender la prueba de Hilbert con base en la noción de función de medida propuesta por Andreotti que examinamos en la sección anterior.

En la última sección, propondremos un sistema de tipos capaz de demostrar una versión del Postulado de De Zolt, pero motivemos, en primer lugar, el cuadro teórico de tipos que presentaremos. Distinguimos entre partes propias y triviales de una descomposición de un poliedro. La unión (*join*) de la cara A_1, A_2, A_3, A_4 del poliedro B_1, A_1, A_2, A_3, A_4 con la cara homónima en la Figura 4 lleva al mismo poliedro de la izquierda. La Figura 6 lleva explícitamente en cuenta el poliedro trivial A_1, A_2, A_3, A_4 en el truncamiento del poliedro de la derecha. La cara A_1, A_2, A_3, A_4 , que denotamos ϵ opera como una palabra vacía en relación con una lista.

10 Giovannini, E. N., Haeusler, H., Lassalle-Casanave, A., Veloso, P. A. S. De Zolt' Postulate: An abstract approach, First View. Una traducción al inglés de Lomnicki, A. O., On the principle of disjunction in logic and mathematics, 1922, debida a A. McFarland, se encuentra en un apéndice de nuestro artículo

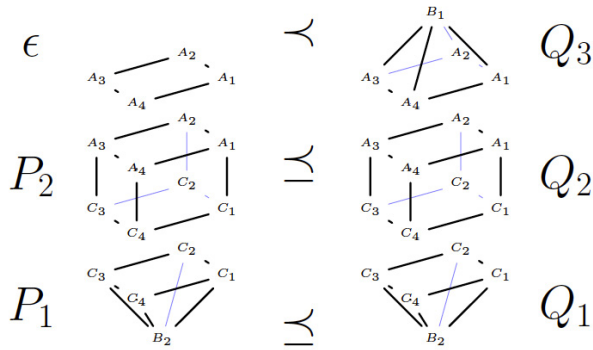


Figura 6

La siguiente derivación ilustra el razonamiento que permitirá concluir que el poliedro truncado, del lado izquierdo, no es finitamente descomponible al poliedro del lado derecho. Los P_i para $i = 1, 2, 3$ son, respectivamente, los poliedros (del lado izquierdo) que constituyen el truncamiento de la descomposición del poliedro del lado derecho, mientras que los Q_i para $i = 1, 2, 3$ son los poliedros que configuran la descomposición. Dado que P_3 es trivial, $P_3 = \epsilon$.

$$\frac{\frac{P_2 \preceq Q_2 \quad P_1 \preceq Q_1}{P_2; P_1 \preceq Q_2; Q_1} \quad \epsilon \prec Q_3}{\epsilon; (P_2; P_1) \prec Q_3; (Q_2; Q_1)}$$

5. Un sistema de tipos para una mereología geométrica

En esta sección caracterizamos una versión de un sistema débil de tipos que pretende demostrar el Postulado de De Zolt en tres dimensiones. La principal forma de afirmación en muchos de los sistemas conocidos de tipos es $t : T$, donde t es un término y T un tipo. Nuestro sistema de tipos tiene solamente cuatro tipos, a saber, el tipo p para puntos, el tipo s para segmentos o secuencias de segmentos (segmentos poligonales), el tipo f para polígonos o caras

y el tipo v para superficies poliédricas o poliedros. Una línea poligonal está constituida por segmentos. Una línea poligonal que está totalmente contenida en un plano y es cerrada es un polígono o cara. Un poliedro está constituido por caras y cuando todos los segmentos de una cualquiera de sus caras pertenece al menos a dos caras entonces la superficie poliédrica es un poliedro, esto es, tiene un volumen. Poliedros pueden ser juntados para formar un (nuevo) poliedro. En el sistema debemos incluir una afirmación adicional $n \text{ cmp } m$ que significa que n y m son elementos compatibles del mismo tipo. Esa afirmación de compatibilidad, cuando satisfecha, es usada para juntar n y m . Pero esta afirmación también la hacemos en la dirección contraria: n y m son compatibles, cuandoquiera que ellos son componentes de una descomposición del mismo poliedro. Finalmente, usamos \mathfrak{T} como una meta-variable para tipos. En la Figura 7 mostramos todas las reglas de tipeo del sistema para la prueba del postulado de De Zolt.

Tipos \mathfrak{T} : p, s, f, v

Sistema de tipos para la mereología geométrica de poliedros

$$\frac{n : p \quad m : p \quad n \neq m}{\langle n, m \rangle : s} \quad s - I_1 \quad \frac{p : s \quad q : s \quad \neg \text{par}(p, q) \quad p \cap q : p}{\langle p : s, q : s \rangle : s} \quad s - I_2$$

$$f - I_1 \quad \frac{p : s \quad q : s \quad \text{Jordan}(p, q)}{p \cup q : f} \quad f - I_2 \quad \frac{p : f \quad q : f \quad p \cap q : s}{p \cup q : f}$$

$$v - I_1 \quad \frac{p : f \quad q : f \quad \text{Cerrado}(p, q)}{p \cup q : v} \quad v - I_2 \quad \frac{p : v \quad q : v \quad p \cap q : f}{p \cup q : v}$$

$$\frac{p : \mathfrak{T} \quad p \preceq p}{p \preceq p} \quad \frac{p : \mathfrak{T} \quad q : \mathfrak{T} \quad p \text{ cmp } q \quad q \neq \epsilon}{p \prec p; q} \quad \frac{p : \mathfrak{T} \quad q : \mathfrak{T} \quad p \text{ cmp } q \quad p \neq \epsilon}{q \prec p; q}$$

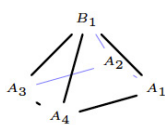
$$\frac{p_i : \mathfrak{T} \quad q_i : \mathfrak{T} \quad p_i \preceq q_i \quad i = 1, 2}{p_1; p_2 \preceq q_1; q_2} \quad \frac{p_i : \mathfrak{T} \quad q_i : \mathfrak{T} \quad p_1 \prec q_1 \quad p_2 \preceq q_2}{p_1; p_2 \prec q_1; q_2}$$

$$\epsilon : \mathfrak{T} \quad \frac{p_i : \mathfrak{T} \quad q_i : \mathfrak{T} \quad p_1 \preceq q_1 \quad p_2 \prec q_2}{p_1; p_2 \prec q_1; q_2}$$

Figura 7

En la regla $s - I_2$, \neg *par* (p,q) vale cuandoquiera que p y q son segmentos no-paralelos. Líneas poligonales son no-paralelas en relación con otros segmentos u otra línea poligonal. En la regla $f - I_2$ *Jordan* (p, q) vale cuandoquiera que la línea poligonal formada con p concatenada a q es una curva de Jordan (línea poligonal), esto es, cuando es una curva plana cerrada. Finalmente, en la regla $v - I_1$, *Cerrado* (p, q) vale cuandoquiera que $p \cup q$ es un sólido cerrado, esto es, tiene volumen formado con las caras en p y q .

Al final de la sección anterior dimos un ejemplo de un término que es del tipo de poliedros. La siguiente derivación muestra eso. Nótese que en ese caso la descomposición es la más simple posible. En efecto, la descomposición es el poliedro mismo. Poliedros son, en general, representados por sus respectivos términos que son esencialmente listas (de listas (de listas)). Por ejemplo, el poliedro en la Figura 8 abajo puede ser representado por el término mostrado a su lado. La parte inicial de ese término corresponde a la cara $A_4 B_1 A_1$. (La representación del poliedro del lado derecho es demasiado larga para ponerla en la figura. Las otras cuatro caras del tetraedro son omitidas en favor de una mejor visualización.) El término que representa el tetraedro en la Figura 8 usa los símbolos de delimitación “[,]”, “⟨,⟩” para facilitar la lectura. Formalmente, los términos son pares, triplas o listas en general, sin relación con el delimitador usado para denotarlo. Se prueba que la cara A^f, B^f, A^l es del tipo f de caras de acuerdo con la derivación en el sistema.



$$\begin{aligned} & \langle \langle [B_1 : p, A_4 : p] : s; [A_4 : p, A_1 : p] : s; [A_1 : p, B_1 : p] : s \rangle : f, \\ & _ : f, \\ & _ : f, \\ & _ : f, \\ & _ : f \rangle : v \end{aligned}$$

Figura 8

Nótese que necesitamos proveer o asumir una justificación para la no-colinearidad de A_4, A_1 y B_1 .

$$\frac{\frac{A_4 \neq B_1}{A_4 : p \quad B_1 : p} \quad \frac{A_1 \neq B_1}{B_1 : p \quad A_1 : p}}{(A_4, B_1) : s \quad (B_1, A_1) : s} \quad \frac{A_1 \neq A_4}{(A_1, A_4) : s} \quad \frac{\langle (A_4, B_1) \cap (B_1, A_1) : p \quad \neg\text{-par}((A_4, B_1), (B_1, A_1)) \rangle}{[(A_4, B_1), (B_1, A_1)] : s} \quad \frac{A_1 \neq A_4}{(A_1, A_4) : s} \quad \frac{A_1 : p \quad A_4 : p}{\text{Jordan}(A_4, B_1, A_1)}}{\langle \langle (A_4, B_1), (B_1, A_1) \rangle, (A_1, A_4) \rangle : f}$$

Lema 5.1 Sea Δ_p la descomposición de un poliedro P , entonces hay una demostración π de $\Delta_p : v$ en el sistema mereológico de tipos.

Esquema de la demostración: Por inducción sobre el número de poliedros en Δ . Si Δ tiene solamente un poliedro δ , entonces tenemos dos casos: (1) δ es su propia descomposición, por lo tanto, $\delta : v$ es una hipótesis, (2) δ es descomponible en superficies poliédricas. En este segundo caso, por una inducción subsidiaria sobre el número k de superficies poliédricas π_1, \dots, π_k , que descompone δ , obtenemos la demostración de $\delta : v$ de $\pi_1 : f, i = 1, \dots, k$, y *Cerrada* $(\cup_{i \in A} \pi_i, \cup_{j \in B} \pi_j)$, usando la regla $v - I_2$, donde A y B es una partición de $\{1, \dots, k\}$. Si $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, entonces, por hipótesis inductiva, para cada $i = 1, \dots, m$ hay una demostración de $\delta_i : v$. Dado que Δ es una descomposición, obtenemos una demostración de $\delta_1 \cup \delta_2 \cup \dots \cup \delta_m : v$, usando la regla $v - I_2$ iteradamente por pares. De hecho, hay una tercera inducción sobre la descomposición de las superficies poliédricas (tipo f) que omitimos en favor de una argumentación más clara.

Una observación importante que debemos hacer en relación al lema previo es el hecho de que todas las condiciones de la prueba, esto es, las instancias de *Cerrado* $(_, _)$, \neg *par* $(_, _)$ y *Jordan* $(_, _)$ son provistas por la *descomposición dada*.

Teorema 5.1 (Compleitud) Sean P y Q dos poliedros y Δ_p y Δ_q sus respectivas descomposiciones, tales que Δ_q es un truncamiento de Δ_p . Entonces existe una demostración de $\Delta_q < \Delta_p$ en el sistema mereológico de tipos.

Esquema de la demostración: De P y Q , por el Lema 5.1, existen π_1 y π_2 derivaciones, respectivamente, de $\Delta_p : v$ y $\Delta_q : v$ y con base en ambas descomposiciones. Combinando π_1 y π_2 obtenemos la demostración de $\Delta_q < \Delta_p$. Obsérvese que la remoción de uno de los poliedros de la descomposición es equivalente a tener ε en su lugar. Comparamos parte por parte del polígono truncado con el polígono entero, usando las reglas mereológicas para $<$ y \preceq para obtener De Zolt.

6. Conclusión

En este trabajo hemos esbozado un sistema débil de tipos que permite obtener una demostración del postulado de De Zolt en tres dimensiones. Nuestro análisis estuvo motivado por dos problemas centrales, relacionados con las limitaciones de extender la validez del mentado postulado desde el dominio de la

geometría plana a la geometría del espacio. Por un lado, en virtud de las conocidas paradojas de Tarski-Banach y Hausdorff, es bien sabido que el postulado de De Zolt no puede ser demostrado en la teoría de conjuntos ZFC. Mediante el sistema de tipos aquí desarrollado hemos identificado una sub-teoría débil de ZF en donde De Zolt preserva su validez. Por otro lado, nuestro abordaje ha permitido resaltar ciertos aspectos conceptuales de las demostraciones geométricas de De Zolt en tres dimensiones. Más específicamente, la existencia de *funciones aditivas finitas* que asocian a cada poliedro un segmento determinado (i.e., su “medida”) es la condición sobre la que se fundan las conocidas demostraciones geométricas de De Zolt en el espacio, tales como la de Andreotti (1949). En el sistema de tipos para la mereología geométrica aquí esbozado, esta condición se refleja en el hecho de que las condiciones de la demostración de De Zolt son provistas por la *descomposición dada*. Esta restricción pone así en evidencia el carácter débil o local de la versión del postulado aquí examinada.

Referencias

- ANDREOTTI, A. Sulla proposizione di De Zolt pei poliedri. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, Serie 3, 4(1), p. 68–75, 1949.
- BANACH, S., TARSKI, A. Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6, p. 244–277, 1924.
- DEHN, M. Über Rauminhalt. *Mathematische Annalen*, 40, p. 465–478, 1902.
- GERWIEN, P. Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 10, p. 228–234, 1833.
- GIOVANNINI, E. N., HAEUSLER, H., LASSALLE-CASANAVE, A., VELOSO, P. A. S. De Zolt´ Postulate: An abstract approach. *The Review of Symbolic Logic*, First View, p. 1–28, 2019.
- HILBERT, D. *Foundations of Geometry*. La Salle: Open Court. Translated by L. Unger from the 10th German Edition, 1971.
- ŁOMNICKI, A. O zasadzie dysjunkcji w logistyce i matematyce. *Ruch filozoficzny*, 6 (1921–1922), p. 144–146. (“On the principle of disjunction in logic and mathematics.”) English translation in Giovannini et alii, 2019.)
- SCHATUNOWSKY, S. Über den Rauminhalt der Polyeder. *Mathematische Annalen*, 57, p. 496–508, 1903.
- SÜSS, W. 1921. Begründung der Lehre vom Polyederinhalt. *Mathematische Annalen*, 82, p. 297–305.
- WAGON, S. The Banach-Tarski Paradox. In: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, vol. 24, 1993.