

## Computadores nas práticas matemáticas: um exercício de microhistória

### *Computers in mathematical practice: an exercise of microhistory*

#### Resumo

O uso de computadores em práticas matemáticas é tema para reflexões de teor filosófico, histórico e sociológico. Amostras da miríade de questões que surgem quando a matemática incorpora definitivamente os computadores em seu domínio podem ser extraídas da análise do peculiar caso da prova do Teorema das Quatro Cores. Invariavelmente as narrativas habituais acerca da instauração da relevância filosófica deste célebre resultado matemático pautam-se pelas questões levantadas a partir do argumento da introdução da experimentação na matemática, de Thomas Tymoczko. O objetivo deste texto é apresentar uma narrativa alternativamente circunstanciada, uma espécie de exercício de microhistória, como pano de fundo para o mapeamento de algumas questões filosoficamente relevantes que ainda podem ser instigadas pelo caso do Teorema das Quatro Cores. Pretende-se sustentar que a relevância deste caso não se reduz à de servir como ilustração de uma curiosidade histórica ou sociológica da matemática ou da ciência da computação, mas pode ainda ser fonte de problemas conceituais interessantes para a filosofia da prática matemática, na interface com a filosofia da ciência da computação.

**Palavras-chaves:** provas computacionalmente assistidas; Teorema das Quatro Cores; Filosofia da Prática Matemática; Georg Kreisel; Hao Wang.

#### Abstract

The use of computers in mathematical practices is a theme for philosophical, historical and sociological reflections. Samples of the myriad of questions that arise when mathematics definitively incorporates computers in its domain can be drawn from the analysis of the peculiar case of the proof of the Four Colour Theorem.

---

\* Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

*Invariably the usual accounts of the philosophical relevance of this celebrated mathematical result are rooted in the questions raised from Thomas Tymoczko's introduction to experimentation in mathematics. The purpose of this paper is to present an alternative detailed narrative, a kind of microhistory exercise, as a background for the mapping of some philosophically relevant questions that can still be instigated by the case of the Four Colour Theorem. We intend to maintain that the relevance of this case is not reduced to that of serving as an illustration of a historical or sociological curiosity in mathematics or computer science, but may still be a source of interesting conceptual problems for the philosophy of mathematical practice, in the interface with the philosophy of computer science.*

**Keywords:** computer-assisted proofs; The Four-Colour Theorem; Philosophy of Mathematical Practice; Georg Kreisel; Hao Wang.

### O caso do Teorema das Quatro Cores no universo das práticas matemáticas

Resultado matemático sensacionalmente popularizado, instauração de um paradigma supérfluo, curiosidade histórico-sociológica, *turning point* nas relações entre filosofia, matemática e computação: a prova do Teorema das Quatro Cores (T4C) provocou, e ainda provoca variadas reações filosóficas – todas relacionadas, mais ou menos diretamente, ao fato de que pela primeira vez um resultado matemático original apelou indispensavelmente a cálculos executados por computadores digitais. O uso de computadores, ferramentas que hoje cumprem distintas e pervasivas funções em diferentes ramos da matemática, configura um prolífico campo de pesquisa filosófica, seja por encorajar questões que estendem a epistemologia tradicional da matemática, como sugere Avigad (2008), por reativar questões filosóficas tradicionais, como indicam Bassler (2006) e Prawitz (2008), por provocar intercâmbios com a história e a sociologia da matemática (o que se vê, por exemplo, em MacKenzie, 2001, 2005), e ainda por estarem estreita relação com o surgimento de dois outros campos de pesquisa: o da assim chamada matemática experimental e o da filosofia da ciência da computação.<sup>1</sup>

---

1 A expressão usual em inglês para designar este campo de pesquisa é *Philosophy of Computer Science*, conquanto em francês se utilize *Philosophie de l'Informatique*.

Uma expedita pesquisa sobre os dois últimos campos mencionados obterá como resultado a indicação de publicações como o periódico *Experimental Mathematics*, fundado em 1992. A descrição dos objetivos do periódico afirma que dentre seus “ingredientes essenciais” encontram-se trabalhos com “algum aspecto experimental” de “relevância para a matemática propriamente dita” e ainda que contemporaneamente “muitos experimentos matemáticos são levados a cabo em computadores, mas muitos ainda são resultados de trabalho com papel e caneta”.<sup>2</sup> Aos olhos educados com as distinções da filosofia da matemática tradicional, uma afirmação algo desconcertante. Afinal, o que está implicado na idéia de *experimento matemático*? O T4C seria um exemplar genuíno de tão insólita espécie?

Vai na esteira desse tipo de questionamento a abordagem de Baker (2015), que considera provas computacionais [*computer proofs*] como *métodos não-dedutivos alternativos*, ao lado de outros como a *indução enumerativa* e as *provas probabilísticas*.<sup>3</sup> O autor nota com acerto que embora os idealizadores da modalidade experimental de matemática aparentemente não pretendam equacionar o uso de computadores com o caráter experimental do estilo que forjaram,<sup>4</sup> na prática esta identificação ocorre, pois “não parece haver um único artigo publicado em mais de uma década de volumes de *Experimental Mathematics* que não envolva o uso de computadores” (Baker, 2015, p. 25). Para Baker, em poucas palavras, há uma diferença significativa entre o que pregam e o que fazem os matemáticos auto intitulados experimentais, na medida em que o que efetivamente parece caracterizar suas práticas é o raciocínio computacionalmente assistido. Posição similar sobre esta identificação entre matemática experimental e matemática computacionalmente assistida é sustentada por McEvoy (2013), para quem, entretanto, embora esta prova seja frequentemente considerada como um procedimento experimental, trata-sede uma prova dedutiva.

---

2 Disponível em <http://www.tandfonline.com/action/journalInformation?show=aimsScope&journalCode=uexm20> (Acesso em 29 de novembro de 2016).

3 Talvez importe ao leitor a informação de que, antes de abordar estes métodos alternativos, Baker trata de aspectos não-dedutivos do método dedutivo, que chama de “aspectos da informalidade”, tais como provas semi-formais, lacunas em provas e uso de diagramas.

4 A ideia de estilo é sugerida pelo autor na passage seguinte: “The biggest practice-based challenge to equating experimental mathematics with computer-based mathematics comes from what *self-styled experimental mathematicians* say about their nascent discipline. For when mathematicians self-consciously reflect on the notion of experimental mathematics, they tend to reject the claim that computer use is a necessary feature.” (Baker, 2015, p. 25, grifomeu).

Tanto na abordagem de Baker quanto na de McEvoy, a prova do T4C é considerada desde uma perspectiva de acordo com a qual o resultado publicado por Appel e Haken em 1977 introduz de maneira incontornável elementos de ordem empírica nas práticas matemáticas, uma vez que o extrato computacionalmente assistido da prova não é passível de verificação algorítmica do mesmo modo como as provas matemáticas eram verificáveis até então. Tendo reconstruído o *argumento da introdução da experimentação na matemática* (AIE) de T. Tymoczko em outras ocasiões,<sup>5</sup> no que se segue farei somente uma brevíssima revisão das peculiaridades filosóficas do caso tal como se apresentam no debate engendrado a partir do AIE, a fim de estabelecer o horizonte de contraste com posições alternativas sobre o caso. É de se notar, entretanto, que antes da publicação da prova do T4C computadores já eram utilizados para produzir resultados lógicos e matemáticos. Ou melhor, para reproduzi-los.<sup>6</sup> Diferentemente, como veremos, a prova do T4C veio dar à praia matemática como o primeiro caso de resultado *descoberto e demonstrado* com o auxílio indispensável de computadores.

Grosso modo, o enunciado do teorema afirma que todo mapa, sob certas condições (de ser um mapa planar e normal), pode ser colorido com somente quatro cores sem que nenhuma região adjacente seja colorida com a mesma cor – o que se chama de coloração admissível. A prova é uma redução ao absurdo que inicia com a assunção de que existe pelo menos um mapa planar normal e minimal (quer dizer, o menor mapa planar normal possível) que é admissivelmente colorível. A obtenção da contradição que encerra a *reductio* depende da aplicação de um método que permite reduzir o mapa da assunção inicial (ou o grafo que lhe corresponde), mostrando, assim, que ele não é o menor possível. Uma vez que para mostrar a redutibilidade do mapa (ou grafo) inicial é preciso construir muitos casos de configurações possíveis de regiões de mapas planares normais (ou de vértices de grafos planares normais), trata-se de um problema essencialmente combinatório – e, justamente por isso, favorável a um tratamento computacional.

---

5 Secco (2013) e Secco (2015).

6 Wang, por exemplo, fornece (em 1960) a descrição de três programas que geravam um procedimento de decisão para o cálculo proposicional: “Estabeleceu-se que a lista total dos quase 200 teoremas dos primeiros cinco capítulos de *Principia Mathematica* é provado em cerca de 37 minutos, sendo que 12/13 do tempo é utilizado para leitura e impressão, de modo que o tempo efetivo de prova para quase 200 teoremas foi de menos de 3 minutos. (...) Em particular \*2.45 foi provado em cerca de 3 segundos e \*2.31 em cerca de 6 segundos.” (Wang, 1960, p. 196)

Apesar de que esta estratégia geral da prova tenha sido desenvolvida desde as primeiras tentativas de provar o T4C, foi somente com o advento dos computadores que se tornou possível calcular os casos (precisamente 1498) necessários para construir um conjunto de configurações redutíveis capaz de permitir a refutação da assunção inicial da dedução. Trata-se, assim, de um problema cuja lógica geral é simples (uma *reductio* que inclui uma prova por indução e alguns conceitos centrais, como os de coloração admissível, quatro-colorabilidade, redutibilidade etc.), complexa, entretanto, do ponto de vista combinatório (exige uma quantidade enorme de casos a construir).<sup>7</sup>

Uma das principais razões avançadas por Tymoczko em favor da tese de que elementos empíricos foram significativamente introduzidos na matemática com a prova do T4C reside na ideia de que por depender parcialmente de cálculos executados por máquinas a prova depende “de um complexo conjunto de fatores empíricos” (Tymoczko, 1979, p. 64). O fato de que foram realizados “experimentos computacionais” no processo de descoberta da prova faria do T4C “a primeira proposição matemática conhecida *a posteriori*” – um genuíno exemplar do tipo de proposição aventado por Saul Kripke, em *Naming and Necessity*.<sup>8</sup> Mais precisamente, Tymoczko afirma:

*O apelo a computadores, no caso do T4C, envolve duas alegações: (1) a de que toda configuração em U é redutível caso uma máquina com tais e tais características quando programada de tal e tal maneira produza um resultado afirmativo para [a redutibilidade de] cada configuração e (2) que tal máquina assim programada efetivamente produz resultados afirmativos para cada configuração. A segunda alegação é o resultado*

---

7 Complexidade típica de outras provas em teoria dos grafos, que podem ser divididas em três partes: “(i) O estabelecimento do fato de que o teorema é verdadeiro dado um determinado conjunto de grafos, configurações, ou – em geral – casos que possuam (ou circunstancialmente não possuam) uma propriedade estipulada; (ii) A obtenção de uma lista exaustiva desses casos; (iii) A confirmação de que todos os membros desse conjunto possui a propriedade requerida. O conjunto finito de casos referidos pode, em um dos extremos, ser tão pequeno e tão simples que o teste de casos pode ser feito em nossas cabeças ou pode, no outro extremo, ser tão extenso e/ou complicado que é impossível de ser levado a cabo sem o auxílio de um computador.” (Swart, 1980, p. 699)

8 Para Kripke, na leitura de Tymoczko, mesmo uma prova realizada com o auxílio de cálculos computacionais *poderia* ser conhecida *a priori*. Para Tymoczko, diferentemente, não é esse o caso do T4C porque “o único caminho que sempre seguimos para o T4C parece levar aos experimentos computacionais (...) os matemáticos jamais o conhecerão por meios *a priori*.” (*loc.cit.*) É interessante notar aqui que nem mesmo Appel e Haken afirmaram algo tão categórico. Consultamos a edição revisada e aumentada com relação à primeira versão, de 1972 – consultada por Tymoczko. (Cf. Kripke, 1980)

[report] de um experimento particular. Foi experimentalmente estabelecido que uma máquina de tipo T, quando programada por P resulta no output O. (Tymoczko, 1979, p. 73)

Reconstruído, este extrato do argumento fica assim:

- P1. Se a máquina M, programada de modo P, produz o resultado R, então U é redutível (donde se conclui o T4C);  
 P2. A máquina M, programada de modo P, produziu R.  
 C. Logo, U é redutível (prova-se o T4C).

Boa parte das respostas ao artigo de Tymoczko centrou-se no uso, nem sempre acompanhado do merecido exame, da tradicional dicotomia *a priori* versus *a posteriori* (aplicada a proposições, evidências,<sup>9</sup> raciocínios e conhecimentos). Da variedade de repostas que se ofereceram, ênfase o grupo daquelas de acordo com as quais a prova do T4C não configura uma novidade tão significativa na matemática, posto que o aspecto empírico destacado por Tymoczko (de P2) não é particularidade de processos calculatórios levados a cabo por computadores, mas de todo e qualquer procedimento de cálculo. Detlefsen e Luker afirmam, por exemplo, que qualquer episódio de cálculo depende da satisfação das seguintes condições:

- (i) a correção do algoritmo subjacente;  
 (ii) a correta implementação do algoritmo;<sup>10</sup>  
 (iii) a execução correta do programa por um agente calculador (condição que os autores associam ao ponto (1) de Tymoczko na citação acima);  
 (iv) a obtenção efetiva do resultado reportado (condição associada ao ponto (2) de Tymoczko).

Essa distinção é importante por indicar a necessidade de esclarecimento de conceitos fundamentais como os de algoritmo, computação, programa, implementação, execução e verificação, a fim de discriminar qual deles possuem

---

9 Para Prawitz, por exemplo, embora a evidência que fundamenta nosso conhecimento do T4C seja parcialmente empírica, isso não significa que devamos confiar menos no acerto do resultado. Posição algo similar é sustentada por Burge (1998).

10 “Um algoritmo é tomado como um ‘protoprograma’, um *design* lógico de um processo que pode ser implementado em qualquer linguagem de programação.” (Detlefsen & Luker, 1980, pp. 808-809).

entre suas notas características noções que os qualifiquem como noções empíricas. Esclarecimentos dessa ordem permitem uma reavaliação do AIE, seus pressupostos e consequências – como o pressuposto não analisado de que é plausível falar de “experimento matemático” (sem esclarecer, por exemplo, o papel das relações causais em tais procedimentos) ou a consequência de que com a prova do T4C a matemática passa, definitivamente, ao domínio das ciências empíricas.<sup>11</sup> O escrutínio daqueles conceitos fundamentais e as questões em que se relacionam permitem tanto um salutar intercâmbio com a área da filosofia da ciência da computação, quanto a reconsideração, à luz de um tal intercâmbio, de noções e problemas mais ou menos tradicionais da epistemologia e da filosofia da matemática.<sup>12</sup>

Como bem observa Prawitz (2008), tanto há casos de provas que verificam programas, quanto de programas que verificam provas. A do T4C é uma prova altamente calculatória, sendo que os programas nela utilizados não foram eles mesmos formalmente verificados, o que poderia legitimar desconfiar sobre a satisfação da condição (i) acima exposta. De fato, é a inexistência de uma prova da correção dos programas usados na prova do T4C que leva Prawitz a considerar que os fundamentos para nosso conhecimento do teorema são parcialmente empíricos, não se tratando de um procedimento inteiramente dedutivo. Vale notar, entretanto, que não é assim judiciosa a posição que deu origem às contendas filosóficas sobre a prova do T4C, pois Tymoczko baseia o AIE menos no fato de que os programas utilizados não foram formalmente verificados do que no fato de que não é possível produzir ou acompanhar humanamente (passo-a-passo) sua execução, tendo-se que confiar no que a máquina reporta como resultado da execução do programa (P2 acima).<sup>13</sup>

---

11 Cf. Tymoczko, 1979, p. 63.

12 O leitor interessado pode consultar o verbete sobre Filosofia da Ciência da Computação da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, em que se apresentam diversas questões relativas aos conceitos fundamentais há pouco mencionados. Para uma discussão sobre o problema da classificação das ciências à luz da informática se pode consultar também alguns trabalhos de Gilles Dowek disponíveis em <http://www.lsv.ens-cachan.fr/~dowek/philo.html>

13 Para esclarecer este movimento do argumento de Tymoczko, e o modo como foi respondido, costuma ser oportuno dispor de uma distinção proposta por Bassler (2006), entre inspecionabilidade [*local surveyability*] e sinopticidade [*global surveyability*]. Assim, uma das alegações que conduziu Tymoczko a anunciar a prova do T4C como emissária da experimentação na matemática pode ser ponderada: enquanto a prova do T4C não é humanamente inspecionável (a execução dos programas utilizados na prova não é localmente verificável, passo-a-passo), ela é passível de verificação sinóptica, porque as ligações lógicas (conceituais) fundamentais são verificáveis.

Respondendo a algumas críticas, os autores da prova afirmam não se preocupar com o fato de que a correção dos programas só pode ser verificada não dedutivamente:

*Muitos matemáticos com algum background em computação se satisfariam com uma cópia do programa, algum modo de verificar que os inputs foram digitados corretamente, e algum output indicando que o programa rodou como devido. Qualquer leitor que permanecesse preocupado poderia facilmente programar uma matriz de algoritmo de multiplicação para seu computador, digitar os inputs e rodar um programa de verificação. Qualquer hesitação remanescente provavelmente resultaria da possibilidade de que tanto o autor quanto o verificador tenham lido mal alguma entrada de input, mas certamente isso é menos preocupante do que dificuldades envolvidas na realização de tarefas similares à mão. Eu chamaria uma prova assim de facilmente replicável. (Appel, 1984, p. 35)<sup>14</sup>*

Como se vê, os participantes da controvérsia filosófica sobre a prova do T4C induzida pelo artigo de Tymoczko não concordam sobre o caráter exclusivamente matemático do procedimento, o que se reflete em diversas ordens de consideração, como, por exemplo, sobre a prova ser ou não inteiramente dedutiva; sobre ela ser ou não um genuíno exemplar de “experimento matemático”; ou sobre a necessidade de verificação formal dos programas utilizados (para que se garanta seu estatuto matemático, entendido como derivado da impermeabilidade a erros que poderiam derivar da não observância da condição (i) de Detlefsen e Luker). Pois em que sentido, ou por quais aspectos, o uso de computadores tal como feito na prova do T4C pode ser considerado um auxílio experimental? Uma resposta a esta questão parece depender, por um lado, dos esclarecimentos conceituais acima mencionados (de conceitos fundamentais em ciência da computação) e, por outro, de uma reflexão sobre o lugar da ciência da computação em meio às demais ciências, incluindo-se seus intercâmbios com a matemática. A atualidade de tais questões abertas com o caso da prova do T4C fica clara, por exemplo, quando lemos em um texto de apresentação do campo da filosofia da ciência da computação que “o desafio empírico” é uma das principais questões para a caracterização da natureza desta ciência.

---

14 Appel chama uma prova de facilmente replicável “se faz uso repetido de um número muito pequeno de algoritmos simples, facilmente programáveis e, assim, verificáveis sem muito esforço por um leitor interessado.” (Appel 1984, p. 35)



Na seção seguinte oferecerei o que chamei de um exercício de microhistória da filosofia da prática matemática<sup>15</sup> a fim de ter mais elementos para a compreensão do peculiar destino filosófico da prova do T4C a partir do AIE de Tymoczko, indicando outras possibilidades de compreensão de sua pertinência e atualidade para a filosofia da prática da matemática.

### Outras vozes, luzes alternativas

Como vimos, as referências mais comuns às controvérsias em torno da prova do T4C costumam aparecer em circunstâncias argumentativas que partem dos problemas colocados por Tymoczko. A primeira ocasião filosófica na qual o T4C foi mencionado, entretanto, data de 1977 e encontra-se em um artigo de Georg Kreisel, no qual se considera três tipos de manejo mecânico de provas (no contexto de desenvolvimento da teoria da prova por parte desse autor): na descoberta [*finding*], na verificação [*checking*] e na transformação [*unwinding*] de provas. Kreisel considerava um truísmo que computadores constituíssem à época uma parte verdadeiramente ínfima da matemática – seu ponto era o que de, em geral, encontrar e verificar provas na matemática de alto nível não era algo que se fizesse através da execução de regras mecânicas.

É aí que prova do T4C é mencionada como *exceção ocasional* ao uso que então se fazia de computadores em matemática, justamente por ter sido descoberta apelando à computação de ponta. Além disso, embora em virtude disso, Kreisel não via razão para que se esperasse uma verificação da prova sem apelo a computadores, fornecendo um paralelo: “No estado atual de nossa experiência é tão razoável procurar por uma verificação [*check*] sem o uso de computadores quanto seria *há cem anos atrás* procurar por uma prova finitista de um teorema descoberto não-constructivamente”. (Kreisel, 1977, p. 66). Numa primeira comparação com abordagem de Tymoczko, portanto, a de Kreisel tão somente constata como inevitável a não inspecionabilidade *humana* da prova do T4C, sem disso concluir qualquer consequência filosófica mais radical.

---

15 A inspiração para esta nomeação se deu a partir da leitura de Ginzbourg (1993), onde se considera comparativamente os aspectos constitutivos da vertente italiana desta modalidade de pesquisa histórica – ser um modelo narrativo que circunscreve o foco em perspectiva de *close-up*, que reconstrói as atitudes das pessoas que participam da narrativa, e que incorpora os obstáculos à pesquisa como elemento narrativo: “a perspectiva específica de cada fonte narrativa contribui para a apresentação do mesmo personagem sob uma luz diferente, alternativa” (Ginzbourg, 1993, p. 30). Nosso personagem, escusa-se dizer, é a prova do T4C e as fontes alternativas são as vozes de Kreisel e Wang.

A segunda ocasião filosófica de menção à prova do T4C que antecede o famigerado artigo de Tymoczko foi realizada por Hao Wang em uma série de palestras proferidas na Academia Chinesa de Ciências, também no ano de 1977. Nos textos elaborados a partir das palestras, constantes em *Popular Lectures on Mathematical Logic* (Wang, 1981), toda uma seção do capítulo sobre computadores é dedicada à prova. Embora publicadas somente em 1981, as considerações de Wang, como as de Kreisel, são interessantes, embora não somente, como ponto de comparação com a postura de Tymoczko, posto que nelas não se levantam dúvidas quanto à matematicidade dos métodos e resultados implicados na prova do T4C. Wang afirma:

*Esse tipo de uso auxiliar e local de computadores como um apoio na prova de teoremas tem sido feito de tempos em tempos [...]. Ele toma a forma do destacamento de partes específicas que exigem extensas computações numéricas ou combinatórias para suplementar o fluxo conceitual dos argumentos que conduzem a uma prova do teorema. Para descrever tais usos, podemos falar de mecanização oportunista ou ad hoc da prova de teoremas.* (Wang, 1981, p. 45, grifos meus)

Wang observa a seguir, numa veia leibniziana,<sup>16</sup> que normalmente ficamos enfadados e cansados com a rigidez e o rigor da “linguagem da máquina” (as instruções do programa “traduzidas” em codificações de zeros e uns, a única “linguagem” que a máquina decodifica). Esta observação, aliás, dá ensejo a uma ressalva pertinente que, entretanto, não parece ter sido levada em consideração no AIE de Tymoczko. Ela diz respeito às especificidades dos programas utilizados para a construção da prova do T4C, mais especialmente à complexidade da linguagem de programação utilizada em sua construção.

---

16 O vínculo das observações de Wang com os temas leibnizianos relativos ao conhecimento simbólico e suas funções – dentre as quais se deve destacar a função calculatória, também entendida como pensamento cego – parece ficar evidente com a leitura de algumas passagens de Leibniz, como esta: “E agora que podemos realizar o elogio final da máquina temos licença para dizer que ela será desejável por parte de todos os envolvidos em computações que, como é bem sabido, são os gerentes de assuntos financeiros, os administradores dos patrimônios alheios, mercadores, fiscais [surveyors], geógrafos, navegadores, astrônomos... Limitando-nos, porém, aos usos científicos, as antigas tabelas geométricas e astronômicas poderiam ser corrigidas e novas construídas, com a ajuda das quais poderíamos medir todos os tipos de curvas e figuras... será válido estender o quanto possível as principais tabelas Pitagóricas; as tabelas de quadrados, cubos, e outras potências; e as tabelas de combinações, variações, e progressões de todos os tipos, ... Também os astrônomos certamente não terão de continuar a exercitar a paciência requerida para computar... Pois é impróprio a homens excelentes perder horas como escravos no trabalho de cálculo que poderia seguramente ser relegado a qualquer outro se a máquina fosse utilizada.” (Leibniz, 1685)

O programa que rodou os cálculos necessários para provar um dos lemas mais importantes da prova do T4C, escrito por John Koch, não foi desenhado em uma linguagem de programação de alto nível – como nas primeiras tentativas de utilizar computadores na construção da prova – mas uma linguagem de baixo nível. Vejamos por que isso pode ser relevante.

Linguagens de programação podem ser caracterizadas *grosso modo* como as instruções que determinam o funcionamento de um dispositivo computacional. Há, entretanto, uma diferença de níveis entre linguagens, dada por sua maior ou menor proximidade com o domínio natural (e, portanto, mais complexo) da linguagem. ALGOL 60, a linguagem primeiramente utilizada nas tentativas de obter resultados de lemas importantes para a prova do T4C,<sup>17</sup> é uma famosa linguagem de ordem superior, dentre outras razões, por sua elegância. Já a linguagem utilizada por Koch, também dita “de montagem” (no caso, uma linguagem *Assembler* da IBM)<sup>18</sup> é um tipo de codificação matematicamente deslegante, embora eficiente com relação à performance do dispositivo calculatório.

Pode-se dizer, com Wang, que na economia geral da prova do T4C os computadores fornecem *suplementações calculatórias ao fluxo conceitual dos argumentos que constituem a prova*. Ora, como nota também Appel, as operações de cálculo realizadas pelo computador poderiam ser executadas por um calculador humano “inumanamente paciente, acurado e incansável, que tivesse propriedades encontradas apenas por computadores” (Appel, 1984, pp.39). Assim, somente se poderia afirmar, como Tymoczko, que a prova do T4C é uma espécie de híbrido entre prova e experimento considerando-se que a execução dos programas escritos em linguagem de baixo nível se assemelha relevantemente a procedimentos experimentais, sendo também seus resultados de

---

17 O programa computacional primeiramente desenhado para determinar o modo de redução de configurações (de mapas) foi criado, de acordo com os atuais padrões, com métodos “praticamente pré-históricos” (Fritsch & Fritsch 1998, p. 27): “Ele [Karl Dürre, o programador] escreveu o programa em [linguagem] ALGOL 60 e perfurou os dados adequados (que consistiam basicamente em matrizes adjacentes) em cartões.” (*op. cit.*) A partir daí a história se desenvolveu em função de encontrar computadores mais potentes para rodar as provas de redutibilidade, acumulando-se frustrações relativas à falta de recursos (as máquinas então disponíveis estavam muito aquém das capacidades de memória exigidas para a tarefa) e de tempo. A situação se modificou somente quando Appel e Haken conheceram Koch, e quando máquinas mais potentes se tornaram disponíveis: “Com o advento de computadores digitais de alta velocidade, entretanto, um ataque a esses problemas [relacionados ao tamanho das configurações as serem reduzidas para encontrar a contradição da *reductio*] tornou-se tecnicamente possível. O pessimismo dos primeiros pesquisadores, que parecia justificado pelas dificuldades da computação manual, tiveram de ser reavaliados à luz das máquinas com poder e velocidade crescentes.” (Appel & Haken 1978, p. 165)

18 Cf. Appel, Haken & Koch, 1977, pp. 493.

ordem empírica (proposições *a posteriori*). Por outro lado, se considerarmos que humanos dotados “da paciência necessária para computar” poderiam realizar os mesmos cálculos que as máquinas, não o fazendo por uma questão de tempo (demandado pela imensa quantidade de casos a serem construídos), então não parece haver razões para que a não inspecionabilidade *humana* da prova do T4C implique seu caráter empírico ou experimental. Ou o fato de que o suporte físico do agente calculador não seja um IBM 360 mas um corpo humano mudaria o alegado estatuto do cálculo (deixando de ser um procedimento empírico que gera uma proposição *a posteriori* para ser um procedimento *a priori* que gera uma proposição de mesma espécie)?

Outro aspecto que aparece quando analisamos as abordagens de Kreisel e Wang é o fato de que apresentam alguma sorte de classificação dos usos de computadores nas práticas matemáticas de seu tempo, localizando a prova do T4C neste universo. Hoje em dia, encontra-se este tipo de estratégia nos trabalhos de MacKenzie (2001, 2005) em sociologia das provas matemáticas e mesmo o artigo já mencionado de McEvoy. Nem no contexto de apresentação do AIE nem nas respostas mais imediatas a ele estratégia similar foi incorporada, o que poderia indicar um menor conhecimento do estado da arte da computação e suas interações com a matemática por parte dos litigantes do debate. Além disso, não se nota da parte de Kreisel ou Wang qualquer tipo de inquietação com relação à possibilidade de que aspectos empíricos da máquina pudessem interferir no processo calculatório ele mesmo (algo em comum com a abordagem de Detlefsen & Luker), nem tampouco se deixa entrever qualquer intenção de revisar os usos dos conceitos de prova, teorema e conhecimento matemático (como é o caso de Tymoczko e de Shanker).<sup>19</sup> Contrariamente, Kreisel e Wang apostavam na interação entre matemática e ciência da computação para a obtenção de novos resultados em ambos os campos, vendo na introdução de computadores na matemática um fator positivo para a compreensão conceitual de problemas lógicos e matemáticos interessantes.<sup>20</sup> Isso talvez se deva ao fato de que, contrariamente a Tymoczko – que tinha uma clara agenda antifundacionalista para defender com

---

19 Stuart Shanker é o autor que introduz explicitamente no debate sobre a prova do T4C o tópico wittgensteiniano da distinção entre prova e experimento, para concluir ainda mais radicalmente do que Tymoczko que não se trata de uma prova, mas de um experimento (cf. Shanker, 1987).

20 Esse é especialmente o caso de Wang, que defende que noções como as de completude, decidibilidade e computabilidade efetiva, dentre outras, são muito melhor esclarecidas com o auxílio de procedimentos de formalização (cf. Wang, 1955, p. 229).

seu estudo de caso –<sup>21</sup> Kreisel e Wang tinham outros objetivos filosóficos (e lógico-matemáticos) em vista.

Além, portanto, de um razoável conhecimento do estado da arte da computação em seu tempo e de não estarem pautados pela mesma agenda filosófica que Tymoczko, os autores aqui destacados valorizam a formalização e a subsequente mecanização de provas para a matemática, apontando para o fato de que existem casos de fronteira diante dos quais não se pode delimitar precisamente a diferença entre formalizar e descobrir uma prova matemática. Isso talvez reforçasse a tese kreiseliana da exceção ocasional que a T4C configura, uma vez que, como observa Wang:

*Há muitos casos nos quais rascunhos essencialmente incompletos, às vezes mesmo contendo erros, são expandidos e transformados em provas mais exatas. Às vezes, não é senão quando temos uma prova trabalhada do começo ao fim que começamos a perceber uma conexão entre ela e outro rascunho ou palpite. Às vezes é difícil decidir se consideramos como descobridor da prova aquele que desenhou o rascunho ou aquele que a formalizou. (Wang, 1955, p. 230, grifos meus)*

Ora, o caso da prova do T4C, tal como depreendido da leitura dos artigos de apresentação da prova (Appel & Haken, 1977 e Appel, Haken e Koch, 1977) e também nos inúmeros artigos de divulgação publicados na avalanche de publicidade que se seguiu ao seu anúncio, pode ser considerado o protótipo desse tipo de interação entre formalização, mecanização e produção de conhecimento matemático, bastante relevante nas práticas matemática hodiernas. Como afirma Appel, com a prova do T4C.

*Gostemos ou não [como mostra o caso da prova do T4C], surgiu um novo método de esforço humano assistido que realiza o trabalho mais acurada e eficientemente do que pode o homem e de fato promove a compreensão humana do que efetivamente foi feito. (Appel, 1984, p. 39, grifo nosso)*

Para finalizar a apresentação dos pontos de comparação entre a abordagem tradicional da prova do T4C, de Tymoczko, e as abordagens por assim dizer marginais

---

21 Como tentei mostrar no quarto capítulo de Secco (2013), Tymoczko entende seu estudo de caso como uma amostra da relevância do quase-empirismo em filosofia da matemática – tendência antifundacionalista de origens um tanto difusas, associável tanto aos trabalhos em que Lakatos busca reviver o empirismo em filosofia da matemática (Lakatos, 1976) quanto a Putnam (1975).

de Kreisel e Wang, gostaria de trazer à baila um aspecto pouco discutido do artigo de Tymoczko, mas que pode, ainda que de modo incidental, ser destacado dos enfoques dos dois autores aqui escutados. É que quando caracteriza a noção “tradicional” de prova, Tymoczko afirma que provas tradicionalmente são  $(\alpha_a)$  convincentes,  $(\alpha_p)$  inspecionáveis [*surveyable*] e  $(\alpha_c)$  formalizáveis, sendo que a prova do T4C apesar de ser  $(\alpha_a)$  e  $(\alpha_c)$ , não é  $(\alpha_p)$ . Já sabemos que de posse da distinção entre inspecionabilidade e sinopticidade se pode reformular a ideia de Tymoczko, afirmando-se que a prova, apesar de não ser humanamente inspecionável, é dotada de sinopticidade. A partir disso, a pergunta relevante aqui parece ser: como uma prova que não é humanamente inspecionável pode ser convincente?

Acredito que uma resposta a esta pergunta pode ser obtida se resgatarmos um relato registrado em um dos textos de divulgação da prova do T4C escritos por Appel.<sup>22</sup> Conta-se ali que em uma das primeiras apresentações da prova a audiência dividiu-se claramente em dois grupos: o das pessoas que não se convenciam de que uma prova computacionalmente assistida podia estar correta e o grupo das pessoas que não se convenciam de que uma prova que continha mais de quatrocentas páginas de cálculos manualmente verificados poderia estar correta (cf. Appel, 1984, p. 35 e MacKenzie, 2011, p. 138). Ainda de acordo com o relato de Appel, que se referia a uma palestra realizada pelo filho de Haken na Universidade de Berkeley em 1977, os dois grupos se dividiam de acordo com a idade – enquanto os mais velhos não aceitavam a correção da prova “por computador”, o grupo que reclamava da quantidade de cálculos manualmente executados era composto por pessoas mais jovens.

A historietta, por menos verídica que seja, narra um tipo de situação pouco inaudita nas práticas matemáticas. Trata-se dos momentos em que provas recém descobertas são apresentadas à comunidade matemática, o que invariavelmente ocorre primeiro para a parte desta comunidade cujos membros possuem o conhecimento necessário e suficiente para verificar detalhes e confirmar a validade dos procedimentos: o auditório de *experts*. Como ensina o professor Oswaldo Chateaubriand,<sup>23</sup> provas matemáticas não são adequadas

---

22 E também no quarto capítulo de *Mechanizing Proof: Computer, Risk and Trust* (MacKenzie, 2001), dedicado inteiramente a uma reconstrução histórica, filosófica e sociológica da recepção da prova do T4C.

23 Especialmente nos capítulos finais do segundo volume de *Logical Forms* (Chateaubriand, 2005). Devo à recepção das ideias de Chateaubriand por Lassalle Casanave (2008) boa parte do que compreendo sobre os aspectos retórico-dialéticos das práticas de prova, embora algo também se deva ao clássico livro de Toulmin sobre os usos do argumento.

mente examinadas quando se as considera somente desde o ponto de vista da formalizabilidade e da verificabilidade algorítmica. Provar algo matematicamente é também (embora não somente) uma prática de apresentação de ideias e argumentos que ocorre em diferentes contextos e com diversos tipos de atores sociais, como o contexto didático (em que os atores são professores e estudantes, os primeiros ensinando os últimos certas provas de resultados já conhecidos), os contextos acadêmicos (em que os atores são colegas que apresentam resultados novos uns para os outros, seja em eventos ou em publicações especializadas), e mesmo os contextos de divulgação de resultados matemáticos para públicos não especializados.

Por mais que se possa perguntar em que medida a palavra “provar” é legitimamente utilizada em todos esses contextos como nome a prática demonstrativa para a qual a filosofia sempre atentou com distintas intenções, pode-se recorrer uma vez mais ao caso das controvérsias em torno da prova do T4C para indicar a existência de questões que merecem atenção por parte da filosofia da prática matemática. Se provar algo matematicamente não é um procedimento meramente mecânico, no sentido da execução de uma série de passos calculatórios, mas uma prática argumentativa que pode, em maior ou menor medida, adaptar-se ao auditório (no sentido da maior ou menor necessidade de explicitar pressupostos, como por exemplo, a prova de certos lemas), o caso da recepção da prova do T4C por parte de diferentes auditórios (de matemáticos, cientistas da computação e filósofos – mais ou menos familiarizados com práticas de prova em lógica e em matemática) é um exemplo de como a introdução de novos instrumentos teóricos impõe aos diferentes públicos maiores ou menores esforços de familiarização com tais instrumentos para que se possa convencer da correção dos resultados.

O debate filosófico que ocorreu em virtude do AIE de Tymoczko, bem como seus ecos na literatura contemporânea sobre computadores na matemática, parece ter ignorado este que se pode chamar, com Lassalle Casanave (2008), de aspecto retórico-dialético da prática matemática de provar e que, indiretamente, o contraste entre as abordagens de Tymoczko e de Kreisel e Wang permite revelar: pareceria razoável sustentar que os diferentes *graus de detalhamento* na apresentação da prova dependem estritamente do *grau de familiaridade* do público com os conceitos e métodos matemáticos em questão, variando também, de acordo com o mesmo índice, o *grau de compreensão* da mesma. Teríamos, assim, destacado o aspecto retórico da contexto-dependência das práticas matemáticas de prova, conservado mesmo em uma prova como a do T4C – na medida em que detalhes acerca da assistência

computacional podem não ser relevantes dependendo da ocasião de sua apresentação. O aspecto dialético, por sua vez, permanece na existência de um auditório de especialistas familiarizados com todos os procedimentos em questão, o que justamente os capacita a inspecionar o processo do modo mais detalhado possível – verificando a execução dos programas em máquinas distintas das utilizadas pela equipe de Appel e Haken.

Há, aliás, um ponto que merece destaque como reforço de nossa leitura da prova do T4C a partir de considerações de ordem retórico-dialética. Em entrevista a MacKenzie, por exemplo, Haken afirmam acerca do processo de verificação da prova:

*Queríamos que [o artigo] fosse revisado pelos melhores especialistas possíveis. Então conseguimos com o editor [que] o referee da inevitabilidade, fosse Jean Mayer, que era o melhor homem do mundo para isso naquela época, e [Kenneth Appel] estava passando seu ano sabático lá<sup>24</sup>... e estava presente para responder qualquer questão... Do mesmo modo com o outro [referee], o melhor homem para programas computacionais era Frank Allaire. Ele tinha, à época, programas melhores do que os de Heesch, e muito melhor ainda do que os nossos. Ele foi o referee da redutibilidade. (MacKenzie, 2001, p. 135)*

A existência de poucos especialistas capazes de verificar algumas seções de uma prova matemática deve-se observar, não pode ser considerada exclusividade do nosso estudo de caso. MacKenzie lembra, logo na sequência da citação da entrevista com Haken, que o mesmo – o contato constante com os referees da prova – ocorreu com Andrew Wiles durante os dois anos que se seguiram ao seu anúncio da prova do Último Teorema de Fermat e a publicação definitiva da mesma, em 1995.<sup>25</sup>

Se for plausível a ideia de que a compreensão de uma prova matemática se pode medir ou limitar pelo grau de familiaridade do público a quem se

---

24 O dêitico refere-se à França: Jean Mayer é conhecido por ser o autor de um artigo sobre as anotações do poeta francês Paul Valéry acerca do T4C. Apesar de ser um *outsider*, professor de literatura na Université Paul Valéry (Montpellier), Mayer chegou a colaborar com Appel e Haken no desenvolvimento de procedimentos de descarga (cf. Fritsch & Fritsch, 1998, p. 32).

25 Para a verificação das duzentas páginas da prova de Wiles o editor de *Inventiones Mathematicae* escolheu seis (ao invés dos tradicionais três) referees. O contato entre Wiles e o examinadores durou cerca de dois anos por causa de um erro na prova da conjectura de Taniyama e Shimura, absolutamente essencial à prova.



apresenta, isso vale não somente para o público matemático, mas também para o filosófico. Assim, poderíamos pensar que enquanto o AIE de Tymoczko se erige a partir de uma compreensão dos métodos e pressupostos da prova do T4C que é por assim dizer “externa” ao universo matemático no qual o resultado foi engendrado, as abordagens de Kreisel e Wang revelam um maior grau de familiaridade de seus autores, afinal frequentadores do mundo da lógica e da matemática sobre a qual filosofaram. Que estas duas sortes de reflexão filosófica não tenham tido o mesmo destino, portanto, não é de se estranhar. Que boa parte dos problemas filosóficos seja derivada de algum percalço na descrição e na compreensão do que se passa e que se pretende problematizar parece ser lição wittgensteiniana de algum valor. Que o breve exercício de microhistória e de comparação aqui fornecido possa ilustra-lo, cabe ao leitor ajuizar.

## Referências

- APPEL, K. (1984) “The use of the Computer in the Proof of the Four-Color Theorem”. *Proceedings of the American Philosophical Society*. Vol. 128, no1. pp. 35-39.
- APPEL, K. & HAKEN, W. (1978) “The Four-Color Problem”. In: STEEN, L. A. *Mathematics Today*. New York/ Heidelberg/ Berlin: Springer Verlag, p. 153 –180.
- APPEL, HAKEN & KOCH (1977) “Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility”. *Illinois Journal of Mathematics*, Vol. 21, Issue 3 (1977), 491-567.
- AVIGAD, G. (2008) “Computers in Mathematical Inquiry”. MANCOSU, P. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, pp. 302-316.
- BAKER, A. (2015) “Non-Deductive Methods in Mathematics”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponível online: <http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-nondeductive/>
- BASSLER, O. B. (2006) “The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective”. In: *Synthese*, 148, pp. 99-133.
- BURGE, T. (1998) “Computer proof, a priori knowledge and other minds”. In: *Philosophical Perspectives*, vol. 12, pp. 1–37.
- CHATEUBRIAND, O. (2005) *Logical Forms Part II – Logic, Language, and Knowledge*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência.
- DETLEFSEN, M. & LUKER, M. (1980) “The four-color theorem and mathematical proof”. *The Journal of Philosophy*, vol. 77, pp. 803-820.
- FRITSCH&FRITSCH, R. & G. (1998) *The Four-Color Theorem*. Trad. Julie Peschke. New York/ Heidelberg/ Berlin: Springer Verlag.
- GINZBOURG, C. (1993) “Microhistory: Two or Three Things That I Know About It”. Translated by John Tedeschi; Anne C. Tedeschi. *Critical Inquiry*, Vol. 20, No. 1. (Autumn), pp. 10-35.

- KRIPKE, S. (1980) *Naming and Necessity*. Oxford: Blackwell.
- KREISEL, G. (1977) "From foundations to science: Justifying and unwinding proofs". *Recueil des travaux de l'Institut Mathématique – Nouvelle serie* (Symposium: Set theory. Foundations of Mathematics, Beograd, 29.08 - 2.09.1977). Tome 2 (10), pp. 63-72.
- LAKATOS, I. (1976) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. London: Cambridge University Press.
- LASSALE CASANAVE, A. "Entre la retórica y la dialectica". *Manuscrito– Logic Language and Knowledge – Essays on Chateaubriand's Logical Forms*. Vol. 31– no1 (Jan-Jun), pp. 11 – 18.
- MACKENZIE, D. (2001) *Mechanizing Proof: Computer, Risk and Trust*. Cambridge/London: The MIT Press.
- MACKENZIE, D. (2005) "Computing and the cultures of proving". *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 363, no 1835 – *The Nature of Mathematical Proof*, pp. 2335 – 2350.
- MCEVORY, M. (2013) "Experimental mathematics, computers and the a priori". *Synthese*, 190, v.3, pp. 397-412.
- PRAWITZ, D. (2008) "Proofs verifying programs and programs producing proofs". *Deduction, Computation, Experiment: Exploring the Effectiveness of Proof*. Berlin/Heldberg/New York: Springer, pp. 81-94.
- PUTNAM, H. (1975) "What is mathematical truth?". In: *Philosophical Papers*, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 60-78.
- SECCO, G. D. (2013) *Entre Provas e Experimentos: uma leitura wittgensteiniana das controvérsias em torno na prova do Teorema das Quatro Cores*. Rio de Janeiro. Tese de Doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Orientador: Luiz Carlos Pereira.
- SECCO, G. D. (2015) "In a Wittgensteinian Light". HEUSLER, H. et. al. *Why Is This a Proof? Festschrift for Luiz Carlos Pereira*. London: College Publications, pp. 45-53.
- SHANKER, S. (1987) *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*. London: Croom Helm.
- SWART, E.R. (1980) "The Philosophical Implications of the Four-Color Problem". *The American Mathematical Monthly*, v. 87, n. 9, pp. 697-707.
- TURNER, R. & EDEN, A. (2009) "The Philosophy of Computer Science". *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/computer-science/>>
- TYMOCZKO, T. (1979) "The Four-Color Problem and its Philosophical Significance". *The Journal of Philosophy*, Vol 27, no 2, pp 57-83.
- WANG, H. (1955) "On formalization". In: *Mind*, New Series, vol. 64, no. 254 (Abril), pp. 226-238.
- WANG, H. (1960) "Toward Mechanical Mathematics". In: *IBM Journal of Research and Development* vol. 4, pp. 2–22.
- WANG, H. (1981) *Popular Lectures on Mathematical Logic*. New York: Dover Publications.