Abel Lassalle Casanave*

Uma introdução à recepção moderna da geometria euclidiana

An introduction to the modern reception of Euclidean geometry

Resumo

A reflexão kantiana acerca da metodologia da matemática está claramente inserida na tradição metodológica aristotélica de acordo com a qual na modernidade se procedia a expor more silogístico os Elementos de Euclides. Este artigo consiste em uma exposição introdutória de alguns aspectos relevantes da recepção moderna da geometria euclidiana para a compreensão da filosofia kantiana da matemática.

Palavras-chave: Kant; Aristóteles, *Elementos* de Euclides; filosofia da matemática.

Abstract

The Kantian reflection on the methodology of mathematics is clearly inserted in the Aristotelian methodological tradition according to which, in Modernity, one should proceed to expose more syllogistic the Elements of Euclid. The aim of this paper is to make an introductory exposition of some relevant aspects of the modern reception of Euclidean geometry for the understanding of Kant's philosophy of mathematics.

Keywords: Kant; Aristotle; Euclid's *Elements*; Philosophy of Mathematics.

* UFBA/CNPq.

A distinção entre o método filosófico e o matemático – um tópico relevante na filosofia do século XVIII – foi um problema que Kant enfrentou nas diferentes etapas de seu *tour de force* intelectual. Na *Crítica da razão pura* (doravante *Crítica*), o conhecimento filosófico é descrito como conhecimento racional por conceitos, o matemático por construção de conceitos.[1] A 'construção de um conceito' consiste em 'expor (*darstellen*) a intuição a priori a ele correspondente',[2] os conceitos filosóficos, no entanto, não podem ser construídos, eles são analisados. Embora a noção de construção não diga respeito exclusivamente à geometria sintética, Kant se serve na *Crítica* da demonstração do célebre teorema que afirma a igualdade dos ângulos internos de um triângulo com dois retos para comparar o procedimento filosófico de decomposição de um conceito em suas notas constituintes, i.e., análise, com o procedimento próprio do geômetra, que começa a demonstração expondo ou exibindo (construindo) uma figura ou outros elementos diagramáticos. É verdade que Kant não reduz na *Crítica* a filosofia somente à análise conceitual, mas a distinção entre conceitos que são construídos e conceitos que são analisados basta-lhe para concluir que só na matemática há definições, que só na matemática há axiomas e que só na matemática há demonstrações. A filosofia, cujo conhecimento é por conceitos, não pode, portanto, imitar o método da matemática.[3]

A terminologia empregada por Kant para distinguir entre filosofia e matemática diz respeito ao método axiomático clássico, ilustrado paradigmaticamente nos *Elementos*, a monumental obra de Euclides. Definições, postulados e noções comuns constituem certamente pontos de partida nos *Elementos* para qualquer demonstração, independentemente da natureza dessas categorias metodológicas, acerca da qual Euclides nada diz. As definições, os postulados e as noções comuns justificam a maioria, ainda que não todos, dos passos de uma demonstração, pois em alguns casos específicos Euclides recorre ao diagrama que acompanha a prova. Por certo, tampouco Euclides diz algo a respeito do que é uma demonstração, ele simplesmente demonstra. Entre muitas outras proposições demonstradas, encontra-se nos *Elementos*

---

1 Para as citações da *Crítica*, como usual, com a paginação da primeira e da segunda edição; para a tradução portuguesa a referência entre colchetes será feita da seguinte maneira: Kant, ano, número de página.

2 A 713/B 741 [Kant 2013, p. 430].

3 Examinei esquematicamente o conceito kantiano de análise em Lassalle Casanave 2011; para a construção de conceitos, veja-se Lassalle Casanave 2012.

o teorema já mencionado utilizado por Kant para ilustrar a distinção entre conhecimento por conceitos e por construção de conceitos.

No entanto, Kant não foi certamente o primeiro a refletir sobre as categorias metodológicas acima mencionadas. Aristóteles, nos *Segundos Analíticos*, distingue entre princípios comuns e princípios próprios; entre os últimos distingue definições de hipóteses. No entanto, a contribuição revolucionária de Aristóteles quiçá não seja tanto a aclaração dessas noções, mas sua análise do conceito de demonstração como cadeia de silogismos válidos, assim como a subsequente caracterização de ciência demonstrativa como constituída por cadeias desse tipo cujas premissas em última instância são princípios. Embora Aristóteles não tenha conhecido os *Elementos*, escritos aproximadamente 20 anos após sua morte, parece pouco menos que inevitável, com os consequentes riscos, que se projete, seja a estrutura dedutiva dos *Elementos* sobre os *Segundos Analíticos*, sejam as teses metodológicas dos *Segundos Analíticos* sobre os *Elementos*.[4] Nas duas primeiras seções deste artigo se correrá esse risco.[5]

Dois milênios separam Aristóteles e Euclides de Kant: qual a necessidade de lembrar-se daqueles? A resposta é indireta. No século XVII, as categorias metodológicas com que se discute a natureza do método matemático são ainda as aristotélicas. Isaac Barrow, cujas *Lectiones Cantabrigiensis* serão examinadas na terceira seção, quando argumenta em favor da cientificidade da matemática, discorre sobre definições, diferentes classes de axiomas, e, inclusive, reconstrói demonstrações euclidianas à maneira silogística. Em *Elementa Matheseos Universalis*, Christian Wolff, já no século XVIII, trata de forma manifestamente semelhante essas noções dentro da tradição da ciência demonstrativa aristotélica.[6] Assim, a referida resposta indireta consiste em mostrar que a reflexão kantiana acerca da metodologia da matemática está claramente inserida na recepção das categorias metodológicas aristotélicas.[7]

---

4 Cabe pensar que Aristóteles possa ter conhecido algum tratado de estrutura semelhante, mas, caso esses tratados tenham existido, não foram conservados.

5 Essas duas seções desenvolvem e corrigem algumas ideias esquematicamente apresentadas em Lassalle Casanave 2005.

6 Wolff 1741.

7 Este artigo consiste no primeiro capítulo de um livro sobre a filosofia da matemática de Kant em etapa de revisão aparentemente sem fim.Para a defesa dessa última tese o leitor deverá aguardar a publicação do livro (capítulo terceiro).

1.1. A ciência demonstrativa aristotélica

Em uma passagem da *Metafísica* Aristóteles faz uma pergunta que ele próprio responde imediatamente:

> *Porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos? Porque os ângulos traçados em torno de um ponto só são iguais a dois retos.*[8]

Aristóteles é muito expeditivo, tanto quanto se poderia esperar de alguém que estudou em uma instituição que recusava o ingresso daqueles que não sabiam geometria. Sendo nós menos afortunados, a figura seguinte nos ajuda a entender a resposta:

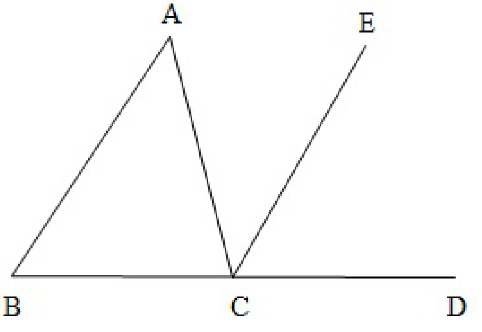

figura 1

Os ângulos traçados em torno de um ponto que são iguais a dois retos mencionados por Aristóteles são os ângulos *BCA* e *ACD*. Aristóteles diz que quem traçasse a paralela ao lado – *CE* e *BA* respectivamente no diagrama – veria (*sic*) o porquê da igualdade dos ângulos internos com dois retos imediatamente. Antes de examinar em que sentido pode qualquer coisa ser vista em um diagrama, explicite-se a inferência *entimemática* que Aristóteles tem em mente:

> *Os ângulos traçados em torno de um ponto só são iguais a dois retos.*
> *Os ângulos internos de um triângulo são ângulos traçados em torno de um ponto.*

8 Citam-se da maneira usual as obras de Aristóteles segundo a edição standard de Bekker.Para o caso que nos ocupa, assim traduz Porchat esta conhecida passagem (*Metafísica*, 1051a 21) em Porchat 2001, p.73.

Os ângulos internos de um triângulo são iguais a dois retos.[9]

A inferência acima exemplifica, parcialmente ao menos, a ideia de ciência demonstrativa apresentada por Aristóteles nos *Segundos Analíticos*, i.e., exemplifica a ideia de uma proposição cientifica ou causalmente demonstrada. O que isso significa? *Em primeiro lugar*, há um requisito de ordem *lógica* para considerar uma proposição cientificamente demonstrada: ela deve ser conclusão de uma cadeia de formas válidas de inferência. Assumindo que a silogística aristotélica apresenta essas formas de inferência (e não leis lógicas), a inferência acima seria da forma tradicionalmente conhecida como *Barbara*, um silogismo da primeira figura:[10]

Todo M é P
Todo S é M

Todo S é P

Sem entrar em detalhes sobre se a inferência que conclui que os ângulos internos de um triângulo são dois retos deve ser considerada ou não um silogismo em sentido técnico estrito, a mera preservação da verdade própria de uma forma de inferência válida não é condição suficiente de cientificidade. Com efeito, *em segundo lugar*, há para Aristóteles requisitos de outra ordem que, por falta de uma palavra melhor, poder-se-iam denominar *epistemológicos*, sendo o primeiro deles, e o mais evidente, que as premissas sejam de fato verdadeiras. Além disso, Aristóteles requer das premissas, entre outras coisas, que sejam também necessárias. E essa necessidade é também preservada por inferência válida. Devem-se ainda lembrar mais requisitos que as premissas devem satisfazer, a saber, que além de causais, sejam imediatas, anteriores e melhor conhecidas do que a conclusão.[11]Porém, antes de tratar deles, é per-

9 Reformula-se estilisticamente o 'silogismo' apresentado em Porchat 2001, p. 74.

10 Segue-se a nomenclatura medieval. As formas de proposições consideradas em uma inferência silogística, que determinam o *modo* do silogismo, são quatro: universal afirmativa (Todo S é P), universal negativa (Nenhum S é P), particular afirmativa (Algum S é P) e particular negativa (Algum S não é P), que são respectivamente denotadas pelas letras A, E, I e O. A *figura* do silogismo depende da posição do termo médio (M), que na primeira figura é sujeito da primeira premissa (a chamada premissa maior) e predicado da segunda (a chamada premissa menor). O modo de *Barbara* é AAA; no silogismo seguinte, também de primeira figura, o modo é EAE.

11 Para todos esses requisitos, veja-se *Segundos Analíticos*, I, 2, 71b 20-22.

tinente comentar uma condição – a universalidade – que diz respeito ao conhecimento entendido como conhecimento do universal; em particular, essa condição de universalidade deve ser satisfeita pela conclusão de uma demonstração científica.

Há no mínimo dois sentidos inter-relacionados de acordo com os quais a conclusão deve ser universal. Por um lado, não satisfaria a condição de universalidade, por exemplo, a proposição que afirmasse de todos os triângulos equiláteros que a soma de seus ângulos internos fosse igual a dois retos. Com efeito, a proposição vale para qualquer espécie de triângulo, não somente para a dos equiláteros. Por outro lado, a universalidade exigida diz também respeito à quantidade da proposição: universal afirmativa, como 'Todo S é P', ou universal negativa, como 'Nenhum S é P'. Dada a excelência que Aristóteles atribui aos silogismos de primeira figura, além da forma *Barbara* acima considerada, somente se poderia concluir cientificamente, ao menos em matemática, por *Celarent*:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Nenhum M é P}\\ \text{Todo S é M}\end{array}}{\text{Nenhum S é P}}$$

Porém, para que se trate de uma demonstração *científica*, de acordo com Aristóteles, as premissas devem exibir a causa – o porquê – da conclusão: os ângulos internos são iguais a dois retos *porque* são ângulos em torno de um ponto. O termo médio do silogismo é aquele que exibe a causa. A disposição do termo médio entendido como causa, por certo, não é alheia à preferência por silogismos de primeira figura. Com efeito, se pensarmos a silogística como um estudo das relações de subordinação e exclusão de conceitos, a posição do termo médio na primeira figura exibe essas relações mais claramente: a *compreensão* dessas relações é manifesta. A exigência de quantidade universal faz o resto: exclui silogismos com conclusão particular, que refletiriam subordinações e exclusões parciais, restando somente *Barbara* e *Celarent*. Por certo, para Aristóteles as demonstrações de proposições afirmativas são superiores às demonstrações de proposições negativas.

Além de causais, as premissas devem ainda ser anteriores e melhor conhecidas (em si, não para nós) que a conclusão, mas também imediatas. As premissas da inferência em exame não são imediatas no sentido delas não serem por sua vez demonstráveis; pois tanto a chamada premissa maior, que os ângulos em torno de um ponto são dois retos, quanto a chamada premissa menor, que os ângulos internos de um triângulo são ângulos em torno de um ponto, se demonstram. Elas são premissas, mas não princípios, que por definição para Aristóteles são indemonstráveis. Enquanto premissas últimas de qualquer cadeia demonstrativa, os princípios são imediatos no sentido em que não pode haver, por definição, um termo médio que possa ser interpolado entre o sujeito e o predicado do princípio em premissas anteriores que permitam demonstrá-los. No entanto, as premissas, princípios incluídos, devem ser também imediatas em relação com as conclusões que delas se seguem no seguinte sentido: não haveria a possibilidade de interpolar termos médios *ad infinitum* entre elas e a conclusão. Aristóteles defende que a cadeia em ordem regressiva de silogismos deve em algum momento parar em princípios, sob pena de um *regressus ad infinitum* ou de um *circulus in probando*. Acrescente-se então que, em ordem progressiva, a intercalação de termos médios na cadeia de silogismos é finita, pois caso contrário também não haveria demonstração.

Ora, no intuito de melhor entender as teses de Aristóteles é pouco menos que inevitável recorrer a Euclides.[12] O que há de comum então em Aristóteles e Euclides que justifique essa estratégia? Euclides, como já foi dito, discrimina entre, por um lado, as proposições demonstradas, e, por outro, definições, postulados e noções comuns. Como em nenhum desses últimos três casos há demonstração, é razoável pensar que definições, postulados e noções comuns são, salvo diferença terminológica, aquilo que Aristóteles denomina princípios.[13] Exemplos muito simples tirados dos *Elementos* permitem ilustrar esses conceitos metodológicos euclidianos, de forma tal que se possa a seguir examinar uma eventual vinculação com os princípios aristotélicos. A Definição 15 diz: Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo] a partir de um ponto dos postos no interior da figura são iguais entre si. (A Definição 16 estipula que esse ponto é chamado centro

12 Como usual, as definições, postulados, noções comuns e proposições dos *Elementos* são citadas com caracteres arábicos, precedidos pelo número do livro com caracteres romanos, de acordo com a edição do texto de Heiberg (Euclid, *Elementa*). Segue-se em geral a tradução ao português de Ireneu Bicudo, Euclides 2009, embora eventualmente serão utilizadas versões ligeiramente diferentes em razão de preferir a terminologia hoje usual.

13 No Capítulo IX da *Introdução* de Th. L. Heath à sua tradução de *Elementos* (doravante, *EEH*) se encontra um detalhado e clássico estudo acerca deste difícil tópico da vinculação entre as teses dos *Segundos Analíticos* e a obra de Euclides. Uma fonte imprescindível para esta discussão é o *Comentário* de Proclus (doravante *CEELF*).

do círculo.) O Postulado 3 autoriza o seguinte: E, com todo centro e distância, descrever um círculo. Finalmente, a Noção Comum 3: E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os todos são iguais.

Que tipo de princípios reconhece Aristóteles? Há princípios *comuns*, que Aristóteles exemplifica com a proposição que aparecerá como Noção Comum 3 em Euclides.[14] Um princípio deste tipo é comum no sentido de que vale para diferentes gêneros de quantidades (geométricas, aritméticas, etc.), mas não há um gênero que abarque todas essas quantidades em conjunto. Tal tipo de princípio comum se aplica ao gênero do qual trate a ciência respectiva, mas não é um princípio *próprio* dela.[15] Há, no entanto, princípios comuns cuja validez é irrestrita, que não estão limitados, por exemplo, a quantidades, sendo o mais ilustre deles o princípio de não contradição.[16]

Entre os princípios que são próprios estão as *definições*, que dizem o que algo é, e as *hipóteses*, que dizem que algo é ou existe.[17] As definições, à diferença dos princípios comuns, sim dizem respeito a gêneros, como aqueles, por exemplo, tratados pela Aritmética e a Geometria. Assim, definem-se, por exemplo, diferentes classes de linhas ou figuras, como a de círculo, na Geometria, ou, na Aritmética, a unidade ou ser número par ou ímpar. As

---

14 Veja-se *Segundos Analíticos*, I, 10, 76a 42-43.

15 A formulação da Noção Comum 3 não deveria enganar: ela não é vista simplesmente como uma verdade lógica (acerca do predicado de igualdade), mas fundamentalmente como um princípio de congruência que vale para (diferentes gêneros de) quantidades assim como também para igualdade de áreas.

16 Uma discutível tendência em fazer de Aristóteles um precursor da metateoria por vezes acaba encontrando dificuldades e explicações igualmente discutíveis. Aristóteles diz dos princípios comuns que não se demonstra a partir deles, mas através deles. O que ele afirma tem uma explicação simples: uma verdade geométrica se demonstra cientificamente *por* princípios próprios, não por princípios comuns, o que não quer dizer que princípios comuns não sejam utilizados em uma demonstração. Isso vale para ambos tipos de princípios comuns. Com efeito, em uma demonstração utilizamos efetivamente – não como exigência metateórica de consistência – o princípio de não contradição ou algum princípio de congruência, que não são princípios relativos às quantidades em questão, i.e., não são princípios próprios. (Não é uma exceção à regra para Aristóteles o caso em que uma ciência é subordinada a outra.)

17 Nesta descrição sumária da ciência demonstrativa há em geral consenso (com matizes) entre as autoridades; em particular, há consenso (também com matizes) nesta caracterização de definições e hipóteses: Ross 2005, p. 43; Moreau 1979, pp. 50-51; Porchat 2001, pp. 225-226. Para uma muito interessante divergência, Clearly 1995, pp. 172-189, sustenta que as hipóteses, como resposta à questão 'se é', não são afirmações de existência, mas afirmações acerca do modo de ser do sujeito da predicação. Vigo 2005, pp. 55-56, segue esta última interpretação.

hipóteses também são princípios próprios para Aristóteles, pois dizem respeito àquilo que uma ciência aceita como existente: unidades, na Aritmética; pontos e linhas na Geometria.[18] Com alguma (boa) dose de interpretação, alguns dos postulados de Euclides podem ser vistos como afirmando existência, por exemplo, o Postulado 3 de Euclides afirmaria, sem demonstração, a existência de círculos. Cabe lembrar que em outros casos, como o de triângulo, se deve, segundo Aristóteles, definir, mas não é necessário supor sua existência, pois cabe ao matemático demonstrá-la.[19]

Enunciados os princípios, de que maneira demonstra Euclides? Nos *Elementos*, Proposição I.32, Euclides formula assim a verdade geométrica referida por Aristóteles: Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos. A Figura 1 que ajudou no melhor entendimento da verdade dessa proposição é o diagrama que nos *Elementos* acompanha a demonstração dela, cujo exame será feito na secção seguinte. Baste por enquanto assinalar que a *reconstrução lógica* de Aristóteles corresponde somente ao último dos passos da sequência em que consiste a demonstração de Euclides.

Com efeito, uma premissa de Aristóteles corresponde a uma proposição (com outro vocabulário) que Euclides previamente demonstra, mas para cuja *compreensão* a figura por enquanto é suficiente: dado o triângulo *ABC* com o segmento da base *BC* prolongado, a figura ajuda a compreender, *mas não provar*, que os ângulos *BCA* e *ACD* 'em torno de um ponto' somam dois retos. Essa é a premissa maior de Aristóteles: Os ângulos traçados em torno de um ponto só são iguais a dois retos. Outra proposição também previamente demonstrada por Euclides autoriza traçar uma paralela em *C* ao lado *AC*. A consideração da figura ajuda compreender, *mas não provar*, que os ângulos *ABC* e *ECD* são iguais, assim como ajuda compreender, *mas não provar*, que são iguais os ângulos *BAC* e *ACE*, proposições que também Euclides demonstra com anterioridade. Considerando a disposição dos três ângulos na figura como soma deles, eis agora a premissa menor: Os ângulos internos de um triângulo são ângulos traçados em torno de um ponto. Por *Barbara*: Os ângulos internos de um triângulo são iguais a dois retos.

Para além das (muitas) objeções que pudessem ser levantadas em relação com a equiparação de princípios entre Aristóteles e Euclides, quem veja

---

18 Veja-se *Segundos Analíticos.* I, 10, 76 a 31-36.

19 Veja-se *Segundos Analíticos*, II, 7, 92b 15-16.

nos *Elementos* uma espécie de cristalização da ideia de ciência demonstrativa também deverá explicar a ausência manifesta de silogismos nas demonstrações de Euclides. A isso se poderia responder que Aristóteles defende que as demonstrações podem ser reconstruídas como cadeias de silogismos a partir de princípios, não que elas sejam tal coisa na prática geométrica.[20] Ora, independentemente de que se saiba hodiernamente que as formas de inferência requeridas para a reconstrução da geometria comportam um aparato lógico muito mais poderoso do que a silogística aristotélica, cabe destacar o papel substantivo, para além de auxílio na compreensão dos passos da demonstração da Proposição I.32 esquematicamente apresentada acima, que os diagramas cumprem de fato nas demonstrações de Euclides, isto é, que eles justificam em alguns casos passos da demonstração, como se mostrará na próxima seção. No entanto, à primeira vista, a ideia de demonstração como uma cadeia de inferências exclui diagramas *per definitionem*, afastando-se, portanto, da prática euclidiana. A isso se poderia replicar que, justamente, nesse ponto Aristóteles tem razão. Com efeito, os diagramas devem ser dispensados para que propriamente haja demonstração; pois um diagrama não justifica nem pode justificar nenhum passo demonstrativo. A réplica admite tréplica, mas antes será necessário considerar de maneira mais acurada as demonstrações dos *Elementos*.

1.2. Princípios e demonstração em Euclides

Resulta conveniente neste momento enunciar todos os postulados e noções comuns de Euclides, lembrando das definições necessárias quando for oportuno. Em primeiro lugar os postulados:

> 1. *Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.*
> 2. *Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.*
> 3. *E, com todo centro e distância, descrever um círculo.*
> 4. *E serem iguais entre si todos os ângulos retos.*

---

20 Uma variante dessa defesa se encontra em Lear 2006, p. 336 (alterando ligeiramente a tradução portuguesa'): Na prática dedutiva real, movemo-nos rapidamente, com referência talvez de passagem a teoremas já provados. Na descrição aristotélica, essa prática é permitida, não por uma análise das consequências, mas pela garantia de que, nos casos duvidosos, qualquer dedução não-formal pode ser formalizada, e toda dedução formalizada pode ser aperfeiçoada – ou seja, transformada num argumento, em que cada etapa se segue obviamente.

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

As noções comuns são as seguintes:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.

4. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

5. E o todo é maior que a parte.[21]

Com a definição 20, que diz que um triângulo equilátero é aquele que tem três lados iguais, pode-se apresentar em detalhe a demonstração da Proposição I.1 que abre os *Elementos*: Construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada. Eis a demonstração. Seja *AB* o segmento dado (a reta limitada dada). Com centro em *A* e distância *AB*, descreva-se o círculo *CDB*; com centro em *B* e distância *BA*, descreva-se também o círculo *CAE*. Ambos esses passos se justificam pelo Postulado 3, que autoriza descrever círculos com qualquer centro e qualquer distância. A partir do ponto *C* onde os círculos se intersectam – veja-se a Figura 2 abaixo – tracem-se as retas *AC* e *BC*, passo justificado pelo Postulado 1.

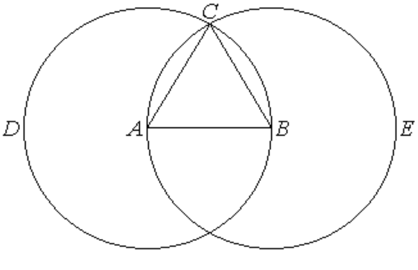

figura 2

21 Na edição de Heiberg, as Noções Comuns 4 e 5 são 7 e 9 respectivamente, mas se segue aqui a numeração hoje usual.

Dado que o ponto *A* é o centro do círculo *CDB*, *AC* é igual a *AB* pela Def. 15 (de círculo). Pela mesma razão, dado que *B* é o centro do círculo *CAE*, *BC* é igual a *BA*. Logo, *CA* e *CB* são iguais a *AB*. Ora, pela Noção Comum 1, *CA* é igual a *CB*; assim, os três segmentos *CA*, *AB* e *BC* são iguais entre si. Logo, *ABC* é um triângulo equilátero.

A Proposição I.1 exemplifica o tipo de proposições que são denominadas tradicionalmente problemas, à diferença de proposições como I.32, que são chamados teoremas. De acordo com Proclus, a fonte clássica desta distinção, os primeiros têm a ver com a construção de figuras e demais operações sobre elas, enquanto os segundos dizem respeito a demonstrar as propriedades inerentes às figuras.[22] Poder-se-ia completar a comparação com o aparato categorial aristotélico da seguinte maneira: um problema é, em linhas gerais, uma demonstração de existência. Define-se 'triângulo equilátero', mas sua existência não necessita ser suposta, se deve demonstrá-la, o que significa 'construí-lo'.[23] Ilustre-se também o conceito de problema com outro exemplo relevante cuja resolução, crucial para a demonstração de I.32, aparece imediatamente antes desta última nos *Elementos*, a saber, a Proposição I.31: através de um ponto dado, traçar uma paralela a um segmento dado. Seguindo a comparação com Aristóteles, se define paralela como linhas retas que estando em um mesmo plano e sendo produzidas indefinidamente em ambas direções não se cortam uma a outra em qualquer direção (Definição 23 de Euclides), mas sua existência se demonstra resolvendo um problema.

Acompanhando também a Proclus, na demonstração de um teorema ou de um problema se distinguem várias etapas das quais nos interessa aqui destacar três: a *ekthesis* ou *exposição*, a *kataskeué* ou *preparação*, chamada também *construção*, e a *apodeixis* ou *demonstração propriamente dita*.[24] Na Proposição I.1, por exemplo, a *ekthesis* consiste na exibição do segmento *AB*; a *kataskeué* está constituída pelas construções dos círculos e também das retas que unem

---

22 *CEELF*, pp. 77-78, extensamente comentado em *EEH*, pp. 124-125.

23 Se pensada como uma tese acerca de Euclides, ela é sedutora, mas discutível, especialmente se assumida a ideia de afirmação existencial em sentido atual. Ela depende de atribuir a Euclides a ideia de que construções são demonstrações de existência (e postulados afirmações de existência). Para uma interpretação alternativa neste respeito dos *Elementos*, veja-se Levi 2008. Lembre-se que também há uma interpretação alternativa para as hipóteses aristotélicas. Não é aqui o lugar adequado para discutir este tópico, ou examinar alternativas: bastará para a finalidade deste artigo aceitar a versão de que teorias como a de Euclides proveem a si próprias seus objetos. De maneira simplificada, e acaso também profundamente anacrônica, valeria a equação 'Existência = Construção'.

24 *CEELF*, pp. 203-210, também extensamente comentado em *EEH*, pp. 129-131.

a interseção dos círculos com os extremos do segmento dado. Finalmente, a *apodeixis* é o argumento que permite concluir que o triângulo assim construído tem os três lados iguais.[25] Ora, deixando por enquanto de lado a *ekthesis*, os passos subsequentes foram todos justificados ou por postulados na *kataskeué* ou por definições ou noções comuns na *apodeixis*, *exceção* feita do (famigerado) ponto *C*, cuja admissão é justificada pelo próprio diagrama, mas que na geometria formal contemporânea é justificada por um axioma de continuidade.[26]

Na demonstração de teoremas como I. 32 se encontram etapas semelhantes: a *ekthesis*, a *kataskeué*, que requer de postulados e problemas previamente resolvidos, e a *apodeixis*, que requer de proposições previamente demonstradas ou de noções comuns. Uma delas é a Proposição I.13 (que com outra terminologia é a premissa maior de Aristóteles): Caso uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos, fará ou dois retos ou iguais a dois retos. Além da já mencionada Proposição I.31, se necessita mais uma proposição previamente demonstrada por Euclides, a saber, a Proposição I.29: A reta, caindo sobre as retas paralelas,faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores no mesmo lado iguais a dois retos.

O primeiro passo da demonstração é a *ekthesis*: seja *ABC* um triângulo (veja-se a Figura 1 acima).[27] A seguir, o Postulado 2 autoriza prolongar o lado *BC* do triângulo *ABC* até *D*. Por I.31, traça-se pelo ponto *C* uma paralela a *AB*. Esses dois passos constituem a *kataskeué*. Na sequência se estabelece: a) que os ângulos *BAC* e *ACE* são iguais entre si, por I.29; b) que os ângulos *ECD* e *ABC* são também iguais entre si, também por I.29. Portanto, o ângulo inteiro *ACD* é igual aos dois internos e opostos *BAC* e *ABC* (e, por conseguinte, maior que cada um deles). Acrescentando *ACB* a ambos, então os ângulos *ACD*, *ACB* são iguais aos três ângulos *ABC*, *BCA* e *CAB*, pela Noção Comum 2. Porém, *ACD* e *ACB*, por I.13, são iguais a dois retos. Logo, *ACB*, *CBA* e *CAB*, os ângulos internos do triângulo, são iguais a dois retos.

---

25 A relação não trivial de igualdade entre segmentos depende da noção de círculo: as igualdades entre os segmentos *AC* e *AB* e *BC* e *AB* se seguem da definição. E uma vez estabelecidas essas igualdades não triviais, deduz-se a igualdade entre *AC* e *BC* por intermédio de uma noção comum.

26 Como em Hilbert 1899. No entanto, para resolver todos os problemas e demonstrar todos os teoremas de Euclides é suficiente um principio mais fraco para interseção de círculos, o Axioma *E* como o denomina Hartshorne.Para estes tópicos, veja-se Hartshorne 2000, cap. 2.

27 De fato, Euclides começa a demonstração com o lado prolongado.

E a mesma estrutura se encontra em um tipo de demonstração que percorre os *Elementos* e que não é possível deixar de considerar, a saber, as demonstrações por absurdo. Considere-se a demonstração da Proposição III. 6: Caso dois círculos tangenciem-se, não será deles o mesmo centro. Dito de outra maneira, círculos que se tocam em um ponto (no sentido técnico de tangentes) não têm o mesmo centro. A demonstração procede assim: Sejam dois círculos *ABΓ* e *ΓΔE* que se tocam no ponto *Γ*, com o mesmo centro *Z*. Tracem-se *ZΓ* e *ZEB* (Figura 3).

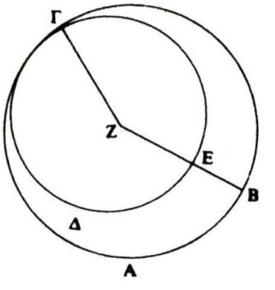

figura 3

Como Z é o centro de *ABΓ*, então *ZΓ* é igual a *ZB* (por definição de círculo), como Z também é o centro de *ΓΔE*, então *ZΓ* (por definição de círculo) também é igual a *ZE*. Logo, pela Noção Comum 3, *ZE* é igual a *ZB*. No entanto, considerando o diagrama, *ZE* é parte de *ZB*, o menor é igual ao maior, o qual é absurdo. Portanto, círculos que se tocam em um ponto não têm o mesmo centro.Ora, aqui também reconhecemos a *ekthesis* (que neste caso não pode consistir literalmente na exibição de círculos que se tocam com um mesmo centro), a *kataskeué*, que consistiu no traçado dos segmentos *ZΓ* e *ZB*, e a *apodeixis*, na qual se utiliza a definição de círculo e noções comuns. Além disso, na demonstração se recorre ao diagrama para estabelecer a contradição. Com efeito, a Noção Comum 5 é utilizada para reformular a relação parte-todo diagramática em termos da relação de ser menor.[28]

Observou-se no fim da seção anterior que havia uma tréplica à tese de que os diagramas deviam ser eliminados, por ilegítimos, de uma demonstração. Na contribuição mais importante à filosofia da geometria dos últimos cinquenta

---

28 Em Lassalle Casanave, A., Seoane, J. 2016 há um exame das demonstrações euclidianas por absurdo com especial referência à interpretação da negação.

anos, Ken Manders mostrou de que maneira Euclides utiliza legitimamente diagramas.[29] Com efeito, Euclides deles se serve somente quando se trata dos aspectos chamados por Manders co-exatos, isto é, aqueles aspectos do diagrama que são invariantes à deformação. A ideia é que por pior, sob certas condições, que sejam descritos os círculos em I.1, o ponto *C* aparecerá; que por pior, sob certas condições, que seja traçada uma paralela ao lado de um segmento dado em I.32, o ângulo externo será dividido em duas partes, e que por pior, sob certas condições, que sejam traçados os raios em III.6, o segmento *ZE* será parte do segmento *ZB*. Utilizando uma terminologia contemporânea, a demonstração seria *heterogênea*, pois, para além da justificação textual da maioria dos passos, alguns deles são *legitimamente* justificados pelo diagrama.

Por certo, não se trata de negar que os diagramas sejam dispensáveis via reconstrução lógica, coisa que se poderia tranquilamente conceder. Do que se trata é de estabelecer se devem ser dispensados por ilegítimos por constituir seu uso uma falha na demonstração.[30] A mencionada tréplica consiste em reivindicar essa legitimidade, com base na noção de invariância à deformação, visando então uma análise das demonstrações euclidianas que não se afastaria da prática de Euclides. Pode-se defender, portanto, que uma análise do conceito euclidiano de demonstração que contemplasse seu caráter heterogêneo seria mais acurada, por exemplo, que a de Aristóteles. Este tópico será de relevância quando examinemos a concepção kantiana da geometria, pois caberia pensar que com sua noção de 'construção de conceitos' Kant poderia ter pretendido oferecer uma análise mais adequada das demonstrações à maneira de Euclides, dada a evidente conexão que há entre a construção em contexto geométrico e a exibição de uma figura ou outros elementos diagramáticos.

A tese de Manders foi recentemente objetada em Panza 2012. Panza defende que o papel dos diagramas na geometria de Euclides diz respeito a fixar a referência dos objetos dos quais trata a teoria. Com efeito, a diferença da concepção extra-teórica dos objetos da geometria formal contemporânea – e, em geral, da matemática contemporânea – uma teoria clássica como a de Euclides forneceria a si própria, intra-teoricamente, seus próprios objetos. Não haveria um domínio de discurso, independentemente dado da teoria, como âmbito de variabilidade das variáveis da teoria como há, por exemplo,

29 Manders 2008. Para uma discussão atualizada dos tópicos tratados nesta seção e na anterior, veja-se Ferreiros 2016, cap. 5.

30 Para esta suposta falha que a realização do projeto aristotélico viria corrigir, veja-se, por exemplo, Lear 2006, pp. 315-319.

em *Fundamentos de geometria* de Hilbert. Panza, como Manders, não defende que a reinterpretação da geometria euclidiana em termos da lógica contemporânea seja uma análise adequada dessa prática matemática. Em ambos os casos, porém, não se trata de negar a possibilidade de uma reconstrução de tal tipo; se trata é de destacar que ao fazê-lo há uma mudança substantiva na *prática* matemática. A diferença se encontra em que se no caso de Manders a indispensabilidade dos diagramas *qua* prática matemática resultaria de uma dependência epistémica, no caso de Panza a dependência seria de ordem ontológica. Não é este o lugar para discutir essa divergência, que em parte se justifica pela perspectiva diferente de ambos autores, mas sim para salientar que podem estar implícitas no próprio Kant *ambas* formas de dependência, cuja conciliação é de difícil ou impossível solução.

1.3. A reconstrução moderna dos Elementos

Porém, antes de avançar qualquer hipótese interpretativa, é necessário considerar a vigência da tradição da ciência demonstrativa aristotélica para a época de Kant. Em seu magnífico livro *Philosophy of Mathematics & Mathematical-Practice in the Seventeenth Century*, Paolo Mancosu mostra a sobrevivência na discussão acerca da metodologia matemática na modernidade do aparato categorialaristotélico, fundamentalmente através do exame da *Quaestio de Certitudine Mathematicarum*.[31] Explica Mancosu que de acordo com Piccolomini, Pereyra e outros aristotélicos do século XVI, as proposições geométricas em geral não seriam causalmente demonstradas. Quais os argumentos desses heréticos para negar a letra do próprio *Philosophus*?

Aristóteles distinguia entre uma demonstração científica, que exibe o porquê de algo, e uma demonstração que simplesmente estabelece que algo é. Por exemplo, não é porque os planetas não cintilem que os planetas estão próximos, mas porque estão próximos é que não cintilam. O primeiro argumento estabelece simplesmente que os planetas estão próximos, não é uma demonstração do por que. Já o segundo fornece o porquê dos planetas não cintilarem: a causa é estarem próximos.No caso da geometria, como visto na primeira seção, Aristóteles declara que a causa de que os ângulos internos de um triângulo sejam dois retos é que ângulos em torno de um ponto são dois retos (que é o termo médio). Certamente, deve-se lembrar que em relação

31 Mancosu 1999, cap. 1.

com as demonstrações por *reductio* Aristóteles já havia afirmado nos *Segundos Analíticos* que elas são menos científicas inclusive que as demonstrações de proposições negativas. A razão é simples de entender: podemos dizer, por exemplo, que a demonstração da Proposição III. 6 fornece a causa de por que os círculos que se tocam não têm um mesmo centro? Poder-se-ia dizer que a demonstração estabelece que as coisas são assim, não a causa de ser assim. Porém, surpreendente, os mencionados hereges negam inclusive a cientificidade da demonstração de I.32!

Eis o argumento. Uma demonstração científica depende fundamentalmente da definição dos conceitos envolvidos, que deve ocorrer como termo médio do silogismo como causa do enlace do sujeito com o predicado da conclusão. Na demonstração de I.32 se prolonga um dos lados do triângulo, determinando um ângulo externo. Porém, afirmam os autores mencionados, o ângulo externo não pertence à definição de triângulo, à essência de triângulo: os ângulos internos são iguais a dois retos independentemente de tal ângulo.[32] O ângulo externo, portanto, não pode desse modo ser a causa de que os ângulos sejam iguais a dois retos. Considere-se também a resolução de I.1: poder-se-ia pensar que não é porque os círculos descritos coincidem no vértice que o triângulo é equilátero, mas porque o triângulo é equilátero é que os círculos descritos coincidem no vértice. De novo, não teríamos uma demonstração científica: os círculos em questão não são notas constitutivas da definição de triângulo equilátero.

Como mostra Mancosu, o tópico da mencionada *Quaestio* foi debatido também durante o século XVII. Mancosu considera, entre outros autores, a Barrow. Com efeito, na sexta e sétima de suas *Lectiones Cantabrigiensis*, de 1683, Barrow discute o problema de se as demonstrações matemáticas são realmente científicas e causais.[33] Barrow distingue entre uma "demonstração simples", constituída por um silogismo só, e uma "demonstração composta", constituída por uma cadeia de silogismos que juntos contribuem à demonstração da proposição em questão. O exemplo que analisará em detalhe é o da Proposição I.1, mas assinalando que substituirá na demonstração, a bem da brevidade, silogismos por entimemas, exceto no último passo dela.

Além dessa notável observação sobre o caráter entimemático da demonstração matemática, Barrow divide a demonstração de I.1 em duas partes: a)

---

32 A objeção já havia sido comentada por Proclus.

33 Barrow 1683 é a edição latina; para o que segue veja-se a edição inglesa Barrow 1734, *Lectures* V e VI.

Construção, a saber, obter o triângulo requerido a partir do segmento dado; b) *Demonstração*, a saber, que o resultado da *Construção* é de fato um triângulo equilátero. Em outras palavras: ele divide a demonstração entre a resolução proposta para o problema e a demonstração de que tal resolução é correta. A *Construção* procede assim:

> *1.Entimema. Qualquer linha reta pode ser raio de um círculo. Logo, AB é o raio de um círculo cujo centro é A.*
>
> *2. Ent. Pela mesma razão, com centro em B e intervalo BA, um círculo pode ser traçado.*
>
> *3. Ent. Dois círculos iguais descritos por um mesmo raio se intersectarão mutuamente um ao outro. Logo, os círculos BCA e ACE se intersectarão mutuamente um ao outro. Suponhamos em C.*
>
> *4. Ent. Uma linha reta pode ser desenhada de um ponto dado a outro. Logo, uma linha reta AC pode ser desenhada de A a C.*
>
> *5. Ent. Por igual razão, uma linha reta BC pode ser traçada.*[34]

Na reconstrução de Barrow, a *ekthesis* aparece como premissa implícita, a saber, *AB* é uma linha reta. Os dois primeiros entimemas correspondem ao traçado dos círculos autorizados pelo Postulado 3. Depois, Euclides traçava um segmento entre os pontos *A* e *C*, por um lado, e *B* e *C*, pelo outro, recorrendo ao Postulado 1, passos que são reconstruídos pelos entimemas quarto e quinto. Ora, para uma reconstrução silogística, como visto na seção anterior, era um problema que o ponto *C* fosse justificado pelo diagrama mesmo. Barrow introduz no terceiro entimema uma proposição que não aparece em Euclides, a saber, que círculos iguais descritos por um raio comum se intersectam em um ponto.[35] Assim, ao menos à primeira vista, a reconstrução elimina o recurso aos diagramas acrescentando as premissas adicionais que são necessárias.

Com isto se conclui a construção ou resolução proposta para o problema. Ainda é necessário demonstrar que o triângulo assim construído é equilátero, i.e., na terminologia de Proclus, faltaria a *apodeixis*, que é a *Demonstração* de Barrow. Ele formula então a seguinte proposição: Um triângulo feito de linhas

---

34 Barrow 1734, *Lecture* VI, pp. 95-96.

35 Poder-se-ia exclamar: *Nihil noui sub sole*! No entanto, caberia também lembrar, apesar do ar de família do axioma de Barrow e o axioma *E*, que um e outro respondem a duas concepções diferentes de teoria matemática e demonstração, a duas diferentes práticas matemáticas.

retas desenhadas dos centros de dois círculos iguais descritos por um raio comum à sua interseção é equilátero. Dessa maneira, transforma o problema em um teorema (de segunda ordem)! E não somente! Com efeito, cabe ressaltar que embora seja natural do ponto de vista da gramática superficial considerar que a Proposição I.32 seja uma proposição universal afirmativa aristotélica, assim como considerar de igual maneira os teoremas em geral, as proposições como I.1, como os problemas em geral, não parecem se enquadrar facilmente dentro dessa mesma categoria. Porém, que uma proposição fosse universal também com respeito à quantidade era, como já assinalado na primeira seção, um requisito epistemológico para considerá-la como sequer suscetível de ser cientificamente demonstrada (na matemática ao menos). Justamente, com sua transformação em teoremas, Barrow reformula problemas como proposições universais!

Barrow procede então a apresentar outra sequência de entimemas na qual a *Demonstração* consiste:

> *1. Ent. Linhas retas desenhadas da circunferência de um círculo até seu centro são iguais entre si. Logo, as linhas retas AB e AC são iguais.*
>
> *2. Ent. Pela mesma razão, as linhas retas BC e AB são iguais.*
>
> *3. Ent. Aquelas coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si. Logo, as linhas retas AC e BC são iguais entre si, porque essas linhas foram provadas iguais a uma terceira AB.*
>
> *4. Todo triângulo que tem três lados iguais é equilátero. O triângulo, como foi agora demonstrado, tem três lados iguais. Logo, o triângulo ABC é equilátero.*[36]

No último passo da *Demonstração* explicitamente são exibidas tanto a premissa maior quanto a menor. O sujeito da maior é a definição de triângulo equilátero; sendo o termo médio, portanto, a causa da conclusão. A demonstração, conclui Barrow, é evidentemente científica e por causa formal. O argumento de Barrow contra os heréticos é simples: não se pode pretender que em cada silogismo concorra a própria definição dos conceitos diretamente envolvidos na proposição a ser demonstrada, mas sim algo derivado das definições deles. Assim, por exemplo, pertence à essência de triângulo ter três lados, mas à essência de lado (poder) ser um segmento, e à essência de segmento (poder)

36 Barrow 1734, *Lecture* VI, pp. 96-97.

ser raio de um círculo. Logo, nesse sentido, os círculos traçados pertencem à essência de triângulo equilátero, cuja definição comparece como tal somente na última das inferências listadas. Na demonstração de I. 32 poderiam ser usados argumentos semelhantes: à essênciade lado de um triângulo pertence ser um segmento, e à de segmento pertence (poder) prolongá-lo, determinando então um ângulo externo.

Que a prova de Barrow acompanha a de Euclides é evidente, mas Barrow substitui a característica prática euclidiana de justificar por postulados, definições e noções comuns por expressões do tipo “propriedade essencial da linha reta”, “mais evidente propriedade do círculo”, “mais notória propriedade do círculo”, justificações todas que são destinadas a salientar que as premissas são verdadeiras pelas essências envolvidas. Quando se trata da Noção Comum 1, por exemplo, a justifica por tratar-se da “mais nobre e evidente propriedade das magnitudes comparadas”. E quando aparece o problema do ponto *C*, de acordo com Barrow, entra em cena “a mais evidente propriedade do círculo como figura fechada e contínua”.

Examine-se o estatuto dessas justificações. De acordo com Barrow, a Noção Comum 1 de Euclides, utilizada no terceiro entimema da *Demonstração*, assim como a Noção Comum 5, são deduzidas por uma espécie de “discurso implícito” das definições ou explicações das palavras que nelas comparecem. Em particular, de acordo com Barrow, também se podem deduzir proposições a partir de um tipo de explicação da palavra que indica a “geração da coisa”: por exemplo, que todas as retas desenhadas do centro de um círculo até a circunferência são iguais – a premissa do primeiro entimema da *Demonstração* – se segue da geração do círculo a partir de uma reta que rota em torno de um dos seus extremos fixo.[37] Disto se deduz que não há outros princípios além das definições?

Barrow contempla também axiomas, que divide em duas classes, a saber, entre aqueles que concordam universalmente com todas as quantidades, ou axiomas universais, e aqueles que concordam particularmente com quantidades particulares, ou axiomas particulares, de maneira que lembra a distinção entre princípios próprios e comuns de Aristóteles, embora acaso se deva observar que aparece em Barrow a ideia de uma ciência geral das quantidades ou grandezas, ideia em favor da qual não há muita evidência em Aristóteles,

---

37 Barrow 1734, *Lecture* V, pp. 77-78.

ao menos nos *Segundos Analíticos*.[38] Axiomas universais são para Barrow, entre outros muitos, as noções comuns de Euclides; como exemplos de axiomas particulares ele menciona, entre muitos outros, os primeiros três postulados dos *Elementos*. No entanto, uma peculiaridade da noção de axioma de Barrow é que ele não parece procurar um conjunto mínimo de princípios, uma ideia usualmente associada com as noções comuns, cujo número é finito, e os postulados, cujo número também é finito. Um exemplo dessa escassa preocupação fundacional de tipo axiomático é que a premissa que acrescenta Barrow para dispensar o uso do diagrama em I.1 não é pensada como o acréscimo de um axioma no sentido usual do termo. Com efeito, segundo Barrow, os axiomas que ele enuncia podem ser quiçá demonstrados, embora sua verdade evidente não faça que isso seja necessário.[39]

Convém insistir: não se trata somente de que a formação de conceitos matemáticos via definição seja por decomposição de conceitos ou análise, coisa que também poderia valer para outro tipo de conceitos além dos matemáticos, mas de que dessas análises resultam dedutivamente os axiomas e os postulados (reformulados em linguagem teórica) e deles, por silogismos, os teoremas e os problemas (reformulados em linguagem teórica). Quando se consideram as definições, as noções comuns e os postulados da geometria de Euclides à maneira de Barrow, se poderia pensar que as definições exprimem análises de conceitos e que os "princípios" se deduzem dessas definições. E como as demonstrações procedem por inferências logicamente válidas, então, em última instância, as proposições geométricas seriam verdadeiras "por meros conceitos", isto é, a geometria se reduziria, em um sentido suficientemente largo, à lógica. Em palavras de Kant, o conhecimento geométrico, ou o conhecimento matemático em geral, seria conhecimento analítico. Com efeito, os juízos seriam analíticos e não, como Kant defende, sintéticos:

> *Os juízos analíticos (afirmativos) são, portanto, aqueles em que a conexão do predicado com o sujeito é pensada por meio da identidade, e aqueles, ao contrário, em que essa conexão é pensada sem identidade, devem denominar-se juízos sintéticos.*[40]

---

38 Poder-se-ia pensar que a ideia de uma *Mathesis Universalis*, presente mais notoriamente na *Metafísica*, contemplasse tal ciência das quantidades, mas há um grande dissenso sobre esses tópicos. Veja-se Rabouin 2009, veja-se também Sasaki 2003, cap. 6.

39 Para esses tópicos, veja-se Barrow 1734, *Lecture* VI, pp. 91-94.

40 B 10 [Kant 2013, p. 51].

Essa será uma tese que, como é bem conhecido, Kant se empenhará em refutar, alegando que a matemática procede por construção, não por análise, de conceitos, razão pela qual seus juízos são sintéticos, embora igualmente necessários. Por certo, nem a proposta de reconstrução lógica *more* aristotélico dos *Elementos* nem a ideia de que axiomas e postulados se deduzam de definições é original de Barrow; ao contrário, sua aceitação é generalizada nos séculos XVII e XVIII. É importante ressaltar que Kant não ignorava a possibilidade de apresentar a geometria *more* silogístico, com os axiomas adicionais necessários, assim como tampouco ignorava as demais distinções metodológicas acima descritas, que Kant formula de maneira semelhante.[41] Acerca disso, por enquanto somente direi: continuará.

Referências

BARROW, I. 1683. *Lectiones Habita in Scholis Publicis Academiæ Cantabrigiensis An. Dom. M.DC.*LXIV, Typis J. Playford, pro G. Wells in Cœmenterio D. Pauli, Londini 1683.

_____. 1734. *The usefulness of Mathematical Learning […]*, Printed for S. Austin, at the Angel and Bible in St. Paul's Church-yard, London 1734.

CLEARY, J. J. 1995. *Aristotle &* Mathematics. Aporetic Method in Cosmology & Metaphysics. Leiden-New York-Köln : Brill.

DE RISI, V. "The Development of Euclide anaxiomatics", *Arch. Hist. Exact. Sci.*, DOI 10.1007/s00407-015-0173-9.

EUCLID. *ELEMENTA*, vols. I-IV de *Euclidi Opera Omnia*. B. G. Teubneri, Lipsiæ, 1883-1888. Edited by I. L. Heiberg and H. Menge. 8 vols. + 1 supp l.New edition by E. S.

EUCLID [EEH]. 1926. *The Thirteen Books of the Elements*, second ed. Cambridge University PRESS, Cambridge. (Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath; 3 vols.)

EUCLIDES. 2009. *Os Elementos*. Editora Unesp. (Tradução de Irineu Bicudo.)

FERRIRÓS, J. 2016. *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton: Princeton UniversityPress.

HARTSHORNE, R. 2000. *Geometry: Euclid and beyond*. Springer.

HILBERT, D. 1899. *Grundlagen der Geometrie*. In: Festschrift zur Feier der Enthullung des Gauss-Weber Denkmals in Gottingen. Herausgegeben von dem Fest-Comitee,

41 De Risi 2015 contém uma muito expressiva recensão de diferentes intentos de axiomatização dos *Elementos* até o século XVIII que servirá de fundamento a esta tese.

Leipzig: Teubner. Reimpressão em M. Hallett, U. Majer, (eds.): *David Hilbert's Lectures on the Foundations of GEOMETRY, 1891-1902*. Berlin: Springer, 2004, pp. 426-525.

KANT, I. 1968.*Kant's gesammelte Schriften, herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin 1902 ff., reimpressão Walter de Gruyter.

_____. 2013. *Crítica da razão pura*. Petrópolis: Vozes. (Tradução e notas Fernando Costa Mattos)

LASSALLE CASANAVE, A. 2005. "Sobre el concepto de demostración en Platón y Aristóteles", *Méthexis*, XVIII: 89-95.

_____. 2011. "Sobre la noción kantiana de análisis", *Aporía*, 2: 101-107.

_____. 2012c. *Por construção de conceitos*. In: Joel Thiago Klein. (Org.). Comentários às obras de Kant: Crítica da Razão Pura. 1ed. Florianópolis: NEFIPO, 2012, p. 657-694.

LASSALLE CASANAVE, A., Seoane, J. 2016.Las demostraciones por absurdo y la Noción Común 5. In: Caorsi, E.: Navia, R.; Sautter, F. (orgs.). Significado y negación: escritos lógicos, semánticos y epistemológicos. 1ed. Montevidéu: Mastergraf, p. 39-50.

LEAR, J. 2006. *Aristóteles: o desejo de entender*. São Paulo: Discurso Editorial.

MANCOSU, P. 1999. *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York: Oxford University Press.

MANDERS, K.: 2008a. "Diagram-Based Geometric Practice". In: P. Mancosu (ed.): *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2008, pp. 65-79.

_____. 2008b. "The Euclidean Diagram". In: P. Mancosu(ed.): *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford UniversityPress, 2008, pp. 80-133.

MOREAU, J. 1979. *Aristóteles y su escuela*. Buenos Aires: Eudeba.

PANZA, M. 2012. "The Twofold Rôle of Diagrams in Euclid's Plane Geometry", *Synthese*, 186: 55-102.

PORCHAT PEREIRA, O. 2001. *Ciência e dialética em Aristóteles*. São Paulo: Fundação Editora da UNESP.

PROCLUS [*CEELF*], 1873. *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*. Teubner, Lipsi. Ex recognitione G. Friedlein.

RABOUIN, D. 2009. *Mathesis Universalis*. Paris: PUF.

ROSS, D. 2005. *Aristotle*. Taylor & Francis e-Library.

SASAKI, C. 2003. *Descartes's Mathemathical Thougth*. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, v. 237.

VIGO, A. 2007. *Aristóteles. Una Introducción.* Santiago de Chile: IES.

WOLFF, Chr. 1741. *Elementamatheseos universalis*. Halae Madgeburgicae, 1741-1756. Emhttp://dx.doi.org/10.3931/e-rara-10422.